This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

3 3433 06644397 3

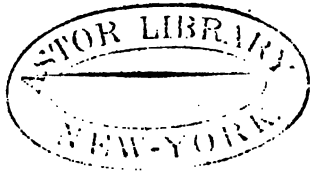
System

der

reinen und angewandten

Mechanik

fester Körper



Von

J. J. A. Ide,

Doktor der Philosophie und Mitglied der physikalischen Gesellschaft zu Göttingen.

Zweiter Theil.

Berlin,

bei Heinrich Frölich. 1802.

Die

Mechanik,

oder die

Lehre von der Bewegung fester Körper.

Zweyter Theil.

Inhalt

des zweiten Theils.

Erstes Kapitel. Von der Bewegung der Punkte.

Die Mechanik zerfällt in Phoronomie und Dynamik . . . . . §. 1.
Arten der Bewegung . . . . . — 3.
Gleichförmige Bewegung . . . . . — 6.
Geschwindigkeit . . . . . — 8.
Ungleichförmige Bewegung . . . . . — 9.
Gleichförmig beschleunigte Bewegung . . . — 14.
— verminderte . . . . . — 16.
Wirkung der Kräfte . . . . . — 18.

Zweites Kapitel. Von der fortrückenden Bewegung eines Körpers in gerader Linie.

Vorläufige Bestimmung der Kraft, die einem Körper fortrückende Bewegung ertheilt . §. 30.
Von der Schwere, und dem freyen Falle der Körper . . . . . — 36.
Relation zwischen Geschwindigkeit und der ihr zugehörigen Fallhöhe . . . . . — 39.
Vergleichung anderer Kräfte mit der Schwere — 42.
Herabgleiten des Körpers von einer schiefen Fläche . . . . . — 44.
Bewegung des Körpers, der von einem sinkenden Gewichte fortgezogen wird . . — 46.
Bestimmung der Friktion, die dabey statt findet . . . . . — 48.
Von den veränderlichen Kräften . . — 50.

Drittes Kapitel. Von der fortrückenden Bewegung der Körper in krummen Linien.

Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeit . . . . . — 55.
Bewegung eines Körpers, der von dreyen auf einander senkrechten Kräften getrieben wird — 58.
Bewegung desselben auf vorgezeichnetem Wege — 60.
Schwungkraft . . . . . — 61.
Wurfbewegung . . . . . — 65.
Einfluß der Umdrehung der Erde auf das Steigen und Fallen der Körper . . . — 73.

Viertes Kapitel. Von dem Widerstande der Luft bey fortrückender Bewegung.

Gesetze dieses Widerstandes . . . . §. 83.
Vertikales Fallen der Körper in der Luft . — 88.
Bestimmung des Widerstandes durch Versuche mit fallenden Körpern . . . . . — 93.
Vertikales Steigen in der Luft . . . — 96.
Vergleichung zwischen dem Steigen und nachmaligen Fallen der Körper . . . . — 99.
Ueber die Bahn geworfener Körper in der Luft — 102.

Fünftes Kapitel. Zurückführung der mechanischen Gesetze auf das Gleichgewicht.

Bey einer einzelnen Masse . . . . — 110.
Bey zweyen verbundenen Massen . . — 115.
Gebrauch der virtuellen Kräfte überhaupt — 123.
Beharrungszustand der fortrückenden Bewegung — 124.

Sechstes Kapitel. Von den Kräften der Menschen und Thiere bey Bewegungen.

Vom Heben einer Last . . . . . — 129.
Vom Gange belasteter Menschen . . — 131.
Allmählige Konsumtion der Kraft . . — 134.
Emporsteigen mit der Last auf geneigtem Boden . . . . . — 139.
Fortschieben einer Masse . . . . — 142.
Kraft der Arme zum Ziehen . . . — 145.
Mechanisches Moment . . . . . — 149.
Vom Zuge der Thiere . . . . . — 154.

Siebentes Kapitel. Vom centralen Stoße der Körper.

Einleitung . . . . . —
Vom geraden Stoße unelastischer Körper . —
— — — vollkommen elastischer —
Schiefer Stoß . . . . . —
Ueber das Einsinken prismatischer Körper in weichen Boden . . . . . —
Anwendung auf das Einrammen der Pfähle —
Vom Einsinken pyramidalischer und anderer Körper . . . . . —
Vom Widerstande, den Räder in weichem Boden leiden . . . . . —

Achtes Kapitel. Von der Umdrehung der Körper um feste Axen.

Eigenschaften dieser Bewegung . . . —
Winkelgeschwindigkeit . . . . . —
Wirkung der Hebelkräfte . . . . . —
Moment der Trägheit . . . . . —
Schwingung der Körper um feste Axen . —
Einfaches und zusammengesetztes Pendel . —
Mittelpunkt der Schwingung . . . . —
Versuche zur Bestimmung der Länge des Sekundenpendels . . . . . —
Schwingung des Körpers bey geneigter Axe —
Zusammengesetzte Maschinen mit mehreren Axen —
Gleichförmige Bewegung bey denselben . . —

Wirksamkeit derselben . . . . . §. 256.
Berechnung einer Roßmühle . . — 259.
Vom Widerstande der Luft bey drehender Bewegung . . . . . — 266.
Bestimmung desselben durch Versuche . — 273.

Neuntes Kapitel. Von den freyen Axen fester Körper.

Gewalt, die die Axe beym Drehen leidet . — 276.
Erfordernisse und Eigenschaften der freyen Axe — 279.
Bestimmung derselben . . . . . — 281.
Folgerungen daraus . . . . . — 282.
Moment der Trägheit für jede Axe auf die der drey freyen Axen gebracht . . . — 287.
Hauptaxen . . . . . — 289.

Zehntes Kapitel. Von der gemischten Bewegung fester Körper.

Zusammensetzung und Zerlegung der Winkelgeschwindigkeiten . . . . . — 290.
Jede augenblickliche Bewegung des Körpers besteht in einem Fortrücken, und einem Drehen um eine durch seinen Schwerpunkt gehende Axe . . . . . — 296.
Wirkung der Kraft, deren Richtung in der Ebene eines Paars freyer Axen des Körpers fällt . . . . . — 300.
Abwicklung einer Rolle von einem Faden — 302.
Herabrollen einer Kugel von einer geneigten Fläche mit Betrachtung der Friktion . — 304.

Schwingung eines Pendels mit beweglicher Are §.
Allgemeinere Betrachtung der freyen Bewegung des Körpers . . . . . —

Eilftes Kapitel. Von der Bewegung biegſamer und elaſtiſcher Körper.

Fundamental-Gleichung . . . . . —
Schwingung der Saiten . . . . . —
Schwingung elaſtiſcher Ruthen und Klingen . —
Ueber Uhrfedern . . . . . —

Erſtes Kapitel.

Von der Bewegung der Punkte.

§. 1.

Die Mechanik umfaßt zwey Lehren, die im Weſentlichen ganz von einander verſchieden ſind. Die eine von dieſen, die Phoronomie, betrachtet bloß die Bewegungen an ſich, ohne darauf zu ſehen, wie ſie entſtanden ſeyn können; die andere handelt dagegen von den Urſachen derſelben, oder den Kräften, und hat davon den Namen Dynamik. Beyde Lehren ſind aber doch zu innig mit einander verwandt, als daß irgend ein Vortheil daraus erwachſen könnte, wenn man ſie abſondern, und aus jeder von ihnen eine eigene Wiſſenſchaft machen wollte.

§. 2.

Wenn ſich ein feſter Körper bewegt, ſo hat dabey jedes Theilchen, jeder Punkt in ihm, ſeine eigene Bewegung. In den meiſten Fällen iſt dieſe nicht für alle Punkte des Körpers einerley; man ſieht z. B. an einer Kugel, die auf einer Ebene hinrollt, daß ihr Mittelpunkt in gerader Linie fortgeht, aber niemand wird wohl

bekannten, daß eben die Bewegung auch einem Punkt in ihrer Oberfläche zukomme. Es wird also nothwendig seyn, zuerst die Bewegung eines einzelnen Punkts besonders zu betrachten, um nachher von der Bewegung eines Körpers, oder ganzen Systems von Punkten richtig urtheilen zu können.

§ 3.

Schon in der Geometrie wird gelehrt, daß ein Punkt, indem er sich bewegt, eine Linie beschreibt. Diese Linie nennt man in der Mechanik den Weg oder den durchlaufenen Raum des Punktes, und seine Bewegung heißt geradlinigt oder krummlinigt, nachdem sein Weg gerade oder gekrümmt ist.

§ 4.

Bey der geradlinigten Bewegung eines Punkts kommen drey Dinge in Betracht: die Richtung, nach der der Punkt fortgeht, der Raum, den er in einer bestimmten Zeit zurücklegt, und die Zeit selbst, die während dieser Bewegung verfließt.

Die Richtung bezieht sich bloß auf die Lage der geraden Linien, und ist also, so lange sich der Punkt darin fortbewegt, unveränderlich. Bey krummlinigter Bewegung hingegen ändert sie sich jeden Augenblick und kommt in jeder Stelle der Kurve, die der Punkt beschreibt, mit der Tangente überein, die sich daselbst an der Kurve ziehen läßt. Die Betrachtung krummlinigter Bewegung setzt also, wie man hieraus sieht, schon Kenntnisse der geradlinigten Bewegung voraus

daher wollen wir uns hier zu Anfange bloß auf letztere einschränken.

§. 5.

Man kann ferner noch die Bewegung in **kontinuirliche** oder **stetige**, und **dikontinuirliche** oder **unterbrochene** eintheilen. Bey jener bewegt sich der Punkt fortdauernd nach einem gewissen Gesetze, so daß dabey Zeit und Raum auf irgend eine Art von einander abhängen. Letztere hingegen wäre eine solche, wo von Zeit zu Zeit plötzliche Aenderungen einträten, die das Gesetz zwischen Zeit und Raum immer von neuem zerstörten, und ein anderes hervorbrächten. Da dergleichen Bewegungen in der Natur höchst selten, und genau genommen, vielleicht nie statt finden, so verdienen sie gerade nicht, besonders betrachtet zu werden. Wenn also in der Folge von irgend einer Bewegung die Rede ist, so soll darunter jedesmal eine solche verstanden werden, wobey der Raum s, der in einer beliebigen Zeit t zurückgelegt ist, durch dieses t auf die eine oder die andere Art sich bestimmen läßt.

Gleichförmige Bewegung.

§. 6.

Unter allen regelmäßigen Bewegungen ist die **gleichförmige** Bewegung, oder die, wobey Zeit und Raum in einerley Verhältnisse zunehmen, die einfachste und natürlichste.

Man setze, der Punkt lege in einem gewissen Zeit-

maaße, z. B. in der ersten Sekunde, den Raum c zurück, nach Verlauf von t Sekunden sey er aber durch den Raum s fortgegangen, und dabey finde immer das Gesetz statt, daß die Räume sich wie die dazu gehörigen Zeiten verhalten, so hat man

$$1 : t = c : s, \text{ folglich}$$

$$s = ct,$$

eine Gleichung, worin alles enthalten ist, was sich über die Natur der gleichförmigen Bewegung sagen läßt.

§. 7.

Läßt man in ihr die Zeit t um einen Theil Δt wachsen, und nennt Δs die daraus entstehende Aenderung von s, so ist $s + \Delta s$ der in $t + \Delta t$ zurückgelegte Raum, also:

$$s + \Delta s = c(t + \Delta t) = ct + c\Delta t$$

davon $s = \ldots\ldots ct$ abgezogen,

bleibt $\Delta s = c\Delta t$.

Der Punkt durchläuft also während seiner ganzen Bewegung in gleichen Zeiten immer gleiche Räume, und in einer Sekunde stets dasselbe Stück c, das er in der ersten Sekunde zurückgelegt hat.

§. 8.

Dieses c dient folglich zum Maaße der gleichförmigen Bewegung, indem davon abhängt, wie viel Raum in einer gegebenen Zeit zurückgelegt wird; man nennt es auch die **Geschwindigkeit** des Punktes.

Es sey die Geschwindigkeit eines Punktes $A = c$, die eines andern Punktes $B = C$, so durchläuft erste-

rr in der Zeit t den Raum s = ct, letzterer in der Zeit T den Raum S = CT. Ist nun t = T, so hat man:

s : S = ct : Ct = c : C. d. h.

die Räume, die zwey Punkte bey gleichförmiger Bewegung in einerley Zeit durchlaufen, verhalten sich, wie ihre Geschwindigkeiten.

Soll dagegen s = S seyn, so wird ct = CT, also

t : T = C : c, oder

die Zeiten, worin zwey Punkte, die sich gleichförmig bewegen, einerley Raum zurücklegen, verhalten sich verkehrt, wie ihre Geschwindigkeiten.

Ungleichförmige Bewegung.

§. 9.

Wenn bey gleichen Aenderungen der Zeit die Aenderungen des Raumes ungleich sind, so nennt man die Bewegung **ungleichförmig**; sie ist **beschleunigt**, wenn der Punkt in jedem folgenden gleich großen Zeittheile einen größern Raum durchläuft, als im vorhergehenden; **verzögert**, wenn dieser Raum nach und nach kleiner wird.

§. 10.

Bey der Voraussetzung, daß sich der Punkt nach einem stetigen Gesetze fortbewege (§. 5.), muß sich die Ungleichheit der Räume auf das kleinste Zeitmaaß erstrecken, worin man die ganze Dauer seiner Bewegung abtheilt. Daher hat der Punkt nur an jeder einzelnen

Stelle ſeines Weges eine beſtimmte Geſchwindigkeit; ſie iſt von Zeit zu Zeit fortwährenden Aenderungen unterworfen, ſo wie das Verhältniß der einzelnen Räume zu den Zeiten, worin ſie zurückgelegt ſind, anders wird. Bey beſchleunigter Bewegung wird alſo die Geſchwindigkeit immer größer, und bey verzögerter Bewegung immer kleiner; überhaupt iſt bey ungleichförmigen Bewegungen die Geſchwindigkeit eine veränderliche Größe, die, eben ſo wie der Raum, von der Zeit abhängt.

Anmerk. Um dies durch ein ſinnlicheres Beyſpiel zu erläutern, ſetze man: ein Baumſtamm ſey, wie gewöhnlich, nach der Spitze zu, dünner, nach der Wurzel zu dicker. Niemand wird ſagen, der Stamm habe gar keine Dicke, weil ſie nicht an allen Stellen gleich groß iſt: aber eine beſtimmte Dicke kann er nur an einer einzigen Stelle haben, und ſo wie man von dem einen Ende zum andern weiter geht, ändert ſie ſich unabläßig. Dennoch läßt ſie ſich an jeder gegebenen Stelle unmittelbar meſſen, welches bey veränderlicher Geſchwindigkeit nicht angeht; offenbar deshalb, weil jene bleibend, dieſe hingegen vorübergehend iſt.

§. 11.

Aufgabe. Es ſey das Geſetz bekannt, nach welchem der jedesmalige Raum s von der dazu gehörigen Zeit t abhängt; man ſucht die Geſchwindigkeit, die der Punkt zu Ende dieſer Zeit t erhalten hat.

Fig. 1. **Auflöſung.** 1 Wir wollen annehmen, der Punkt habe während der Zeit t mit beſchleunigter Bewegung den Raum AP = s zurückgelegt, und ſey nun gegenwärtig in P; ſeine Geſchwindigkeit ſey daſelbſt = u.

2 In dem nächſten Zeittheilchen Δt geht er alſo um ein Stück Pp = Δs weiter, und wenn er in p an-

langt, hat seine Geschwindigkeit einen Zuwachs $= \Delta u$ bekommen, so daß sie an dieser Stelle $= u + \Delta u$ ist.

3) Bewegte sich der Punkt während des Zeittheils Δt gleichförmig, so durchliefe er darin mit der Geschwindigkeit u den Raum $= u\Delta t$, und mit der Geschwindigkeit $u + \Delta u$ den Raum $= (u + \Delta u)\,\Delta t$.

4) Von diesen Räumen ist also unstreitig ersterer kleiner als Δs, letzterer größer als Δs: denn des Punktes Geschwindigkeit ist ja innerhalb der Zeit Δt stets größer als u, und stets kleiner als $u + \Delta u$. Man hat also:

$$\Delta s > u\Delta t, \text{ und}$$
$$\Delta s < (u + \Delta u)\,\Delta t, \text{ oder}$$
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} > u, \text{ und}$$
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} < u + \Delta u, \text{ folglich:}$$
$$\Delta u > \frac{\Delta s}{\Delta t} - u$$

5) Hierbey ist die Zeit Δt willkührlich; man kann sie also so klein setzen, als man will. Läßt man sie unendlich abnehmen, so nimmt auch Δu unendlich ab, folglich auch der Unterschied $\frac{\Delta s}{\Delta t} - u$, da es stets geringer als Δu ist.

6) Daher nähert sich $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ unendlich der Grenze u; zugleich aber nähert sich bey eben der Voraussetzung der

Werth von $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ unendlich der Grenze $\frac{ds}{dt}$; folglich erhält man: $u = \frac{ds}{dt}$.

7) Ist die Bewegung des Punktes verzögernd, so leidet seine Geschwindigkeit u, indem er durch den Raum Pp fortgeht, eine Abnahme $= \Delta u$, und wird also in $p = u - \Delta u$.

8) Bewegte er sich die Zeit Δt hindurch gleichförmig, so legte er in derselben mit der Geschwindigkeit u den Weg $= u\Delta t$, und mit der Geschwindigkeit $u - \Delta u$ den Weg $= (u - \Delta u)\,\Delta t$ zurück. Es ist daher:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} < u, \text{ und}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} > u - \Delta u, \text{ folglich}$$

$$\Delta u > u - \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

9) Läßt man nun wieder Δt unendlich abnehmen, so nimmt auch Δu, und mit diesem zugleich $u - \frac{\Delta s}{\Delta t}$ unendlich ab; also nähert sich wieder $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ unendlich der Grenze u, wie im erstern Falle.

§. 12.

Gegenseitig wird $ds = udt$, also $s = \int udt$, wozu weiter nichts addirt wird, weil für $t = o$, d. h. zu Anfange der Bewegung, auch $s = o$ ist.

§. 13.

Unter den ungleichförmigen Bewegungen kommen zwey besondere Arten: die **gleichförmig beschleunigte**, und **gleichförmig verzögerte** Bewegung am häufigsten vor, und verdienen deshalb vorzüglich bemerkt zu werden. Bey ersterer verhält sich der Zuwachs, bey letzterer die Abnahme der Geschwindigkeit, vom Anfange der Bewegung angerechnet, wie die Zeit, die während derselben verflossen ist.

Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

§. 14.

Es sey zu Anfange derselben, oder für $t = o$, die Geschwindigkeit des Punktes $= c$; der Zuwachs, den sie in der ersten Sekunde dieser Bewegung erhält, $= \varkappa$; so hat sie nach Verlauf von t Sekunden den Zuwachs $= \varkappa t$ bekommen, und ist also in diesem Augenblicke $= c + \varkappa t$.

Man setze diese Geschwindigkeit $= u$; den Raum, den der Punkt während der Zeit t zurückgelegt hat, $= s$, so wird $s = \int u dt = \int dt\,(c + \varkappa t) = ct + \frac{1}{2}\varkappa t^2$.

§. 15.

Ist die anfängliche Geschwindigkeit $c = o$, so hat man:

1. $u = \varkappa t$, und $s = \frac{1}{2}\varkappa t^2$; also verhält sich dann der Raum, wie das Quadrat der Zeit, worin er durchlaufen ist.

2. Der Weg, den der Punkt in der ersten Sekunde dieser Bewegung zurücklegt, ist $= \frac{1}{2}\varkappa$; setzt man ihn $= g$, so wird $s = gt^2$, und $u = 2gt$.

3. Da $u^2 = 4g^2t^2 = 4gs$, so erhält man $u = \sqrt{4gs} = 2\sqrt{gs}$; daher verhält sich die Geschwindigkeit auch, wie die Quadratwurzel aus dem Raume.

4. Gegenseitig ist $s = \frac{u^2}{4g}$

5. Es ist $ut = 2gt^2 = 2s$, d. h. der Raum, den der Punkt in der Zeit t durchläuft, wenn er sich mit der Geschwindigkeit u gleichförmig bewegt, ist doppelt so groß als der, den er in eben der Zeit durchläuft, wenn seine Geschwindigkeit während derselben von o bis zu u gleichförmig zunimmt.

Gleichförmig verminderte Bewegung.

§. 16.

Bey dieser sey die anfängliche Geschwindigkeit des Punktes $= c$; die Abnahme derselben in der ersten Sekunde $= \varkappa$, so beträgt diese in der Zeit $t = \varkappa t$; also ist die Geschwindigkeit u, die dem Punkte am Ende dieser Zeit noch übrig bleibt, $= c - \varkappa t$. Nennt man daher s den Raum, den der Punkt während der Zeit t zurückgelegt hat, so wird $s = \int u dt = \int dt\,(c - \varkappa t) = ct - \frac{1}{2}\varkappa t^2$.

§. 17.

Für $u = o$, wird $\varkappa t = c$, folglich $t = \frac{c}{\varkappa}$. Dies ist also die Zeit, in welcher der Punkt alle seine Ge-

schwindigkeit verliert, oder die Dauer seiner ganzen Bewegung. Für längere Zeit würde nemlich die Geschwindigkeit u negativ, d. h. der Punkt bekäme alsdann eine gleichförmig beschleunigte Bewegung nach entgegengesetzter Richtung.

Setzt man diesen Werth von t in den für s (§. 16.) gefundenen Ausdruck, so erhält man für den Raum, den der Punkt während der ganzen Zeit seiner Bewegung durchlaufen ist:

$$s = \frac{c^2}{\varkappa} - \frac{c^2}{2\varkappa} = \frac{c^2}{2\varkappa}.$$

Eben diesen Werth für s erhält man auch, wenn man in §. 15. $n = \frac{1}{2}$, $t = \frac{c}{\varkappa}$ setzt. Daraus folgt also: daß der Punkt eben den Raum während jener Zeit zurücklegt, wenn seine Geschwindigkeit von o an in eben dem Maaße gleichförmig wächst, als sie im vorigen Falle abnahm.

Wirkung der Kräfte auf die Bewegung eines Punktes.

§. 18.

Ein Körper, der frey von aller Einwirkung fremder Dinge ist, kann den Zustand, worin er sich befindet, nicht durch sich selbst ändern. Er kann also nicht sich selbst aus der Ruhe in Bewegung setzen, und wenn er sich nach irgend einer Richtung mit einer einmal erhaltenen Geschwindigkeit fortbewegt, so hat er weder

eigenes Vermögen, von dieſer Richtung abzulenken, noch ſich ſelbſt eine ſchnellere oder langſamere Bewegung zu ertheilen, wofern nicht eine äußere Urſache, eine Kraft (Statik §. 1.) die eine oder die andere dieſer Aenderungen in ſeiner Bewegung hervorbringt. Dies iſt eine natürliche Eigenſchaft aller Materie, die man mit dem Namen ihrer **Trägheit** belegt.

§. 19.

Wenn alſo ein Körper in Ruhe iſt, ſo bleibt er darin ſo lange, bis ihn eine Kraft in Bewegung ſetzt; und bewegt er ſich nach irgend einer Richtung mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit, ſo ſetzt er dieſe Bewegung ſo lange fort, bis eine Kraft entweder in Anſehung der Richtung oder der Geſchwindigkeit eine Aenderung bewirkt. Gegenſeitig folgt:

Daß ein Körper, der ſich mit veränderlicher Geſchwindigkeit oder in einer Kurve bewegt, beſtändigen Einwirkungen von Kräften ausgeſetzt ſeyn müſſe, die jeden Augenblick ſeine Bewegung entweder beſchleunigen, oder verzögern, oder ihn von ſeiner vorigen Richtung abzuweichen nöthigen.

§. 20.

Zwey gleiche Kräfte, die auf einen Punkt nach entgegengeſetzten Richtungen wirken, erhalten ihn in Ruhe; jede von ihnen, einzeln genommen, bringt ihn aber aus der Ruhe in Bewegung, und es liegt ſchon in dem Begriffe der Gleichheit, daß ihm beyde im erſten Augenblicke der Wirkung einerley Geſchwindigkeit ertheilen müſſen.

§. 21.

Dagegen verhalten ſich die anfänglichen Geſchwindigkeiten, die der Punkt durch zwey ungleiche Kräfte p und q erhält, wenn ſie ihn, einzeln genommen, aus der Ruhe in Bewegung ſetzen, eben ſo wie dieſe Kräfte.

Beweis. 1) Man ſetze zuerſt, die Kraft q ſey irgend ein Vielfaches von p, oder $= np$, ſo kann man ihr, nach der Richtung, die ſie hat, n einzelne Kräfte ſubſtituiren, deren jede $= p$ iſt.

2) Nun ertheile die Kraft p dem Punkte unmittelbar eine Geſchwindigkeit $= c$, oder treibe ihn in dem erſten Zeitmomente dt durch den Raum cdt, ſo hat eben dieſe augenblickliche Wirkung jede andere Kraft auf ihn, die $= p$ iſt; alſo bewirken n ſolcher Kräfte, die auf ihn zu gleicher Zeit nach einerley Richtung angebracht werden, daß er im erſten dt durch den n fachen Raum ncdt geht, und folglich die Geſchwindigkeit nc erhält: denn jede von ihnen wirkt für ſich auf den Punkt, unabhängig von den übrigen Kräften.

3) Eben dies bewirkt alſo auch die Kraft $q = np$; daher iſt der Satz für dieſen Fall erwieſen.

4) Es ſey nun ferner die Kraft $q = \frac{p}{n}$, ſo iſt $p = nq$, alſo die Geſchwindigkeit c, die die Kraft p dem Punkte ertheilt, n mal ſo groß, als die ihm q ertheilt, folglich umgekehrt die Geſchwindigkeit, die er durch q erhält, $= \frac{c}{n}$, oder ein ntel von der, die er durch p erhält.

5) Endlich sey $q = \frac{m}{n} \cdot p$, so bekommt der Punkt durch die Kraft $\frac{p}{n}$ die Geschwindigkeit $\frac{c}{n}$, folglich durch $q = m\left(\frac{p}{n}\right)$ die Geschwindigkeit $m\left(\frac{c}{n}\right) = \frac{m}{n} \cdot c$; also sind wieder die Wirkungen in dem Verhältnisse der Kräfte.

6) Da nun unter $\frac{m}{n}$ jede Verhältnißzahl begriffen ist, so erhellet, daß bey jedem Verhältnisse, das zwischen p und q statt finden kann, auch die Geschwindigkeiten, die diese Kräfte einzeln dem Punkte im ersten Augenblicke der Wirkung ertheilen, dasselbe Verhältniß $p : q$ zu einander haben müssen.

§. 22.

Wir kennen in der Natur solche Kräfte nicht, die durch eine augenblickliche Wirkung irgend eine angebliche Bewegung hervorzubringen fähig wären; selbst während des Stoßes, wodurch ein Körper dem andern Geschwindigkeit mittheilt, verfließt allemal eine gewisse Zeit, und sey diese auch noch so gering, so kann man doch nie sagen, daß dabey die ganze Bewegung plötzlich entstehe. Indeß war die Vergleichung zwischen Kräften und den Geschwindigkeiten, die sie unmittelbar erzeugen, doch nothwendig, um daraus ferner herleiten zu können, was für Wirkung eine Kraft in einer bestimmten Zeit ausübt, wenn sie die Bewegung des

Punk-

ıktes während dieſer Zeit nach einerley Richtung dauernd beſchleunigt.

§. 23.

Aufgabe. Eine unveränderliche Kraft p wirkt einen Punkt, der Anfangs in Ruhe iſt, eine bemmte Zeit hindurch nach einerley Richtung ununterchen fort; man fragt, wie ſeine Bewegung während dieſer Zeit beſchaffen ſey, und welche Geſchwindkeit er zu Ende derſelben erlangt habe.

Aufl. 1) Sie ertheile ihm im erſten Zeittheilchen die Geſchwindigkeit fdt. Wäre ihre Wirkung hier zu Ende, ſo würde der Punkt mit dieſer Geſchwindkeit vermöge ſeiner Trägheit (§. 18.) gleichförmig rtgehen. Aber der Vorausſetzung nach ſoll auf ihn e Kraft p in jedem folgenden Zeittheilchen von neuem irken; ſeine vorige Geſchwindigkeit fdt erhält alſo im zweyten dt denſelben Zuwachs fdt, und wird folglich = 2fdt.

2) Um eben ſo viel vermehrt ſie ſich alſo auch in dem nächſten Zeitmomente dt, ſo daß ſie nach Verlauf der Zeit ndt zu nfdt angewachſen iſt.

3) Man nehme nun n ſo groß an, daß ndt = der gegebenen Zeit t wird, und nenne die geſuchte Geſchwindigkeit, die der Punkt zu Ende derſelben bekommen hat, = u; ſo hat man u = nfdt, oder wenn man für ndt ſeinen Werth t ſubſtituirt: u = ft.

4) Dieſe Geſchwindigkeit verhält ſich alſo jedesmal wie die Dauer der Bewegung, und hängt außer-

dem davon ab, wie groß die erste augenblickliche Wirkung der Kraft auf den Punkt gewesen ist: denn auf dieser beruhet der Koefficient k.

5) Die Bewegung des Punktes ist demnach, während ihn die Kraft p beschleunigt, eine gleichförmig beschleunigte Bewegung (§. 15.).

§. 24.

Man setze, eine andere Kraft q ertheile dem Punkte im ersten Zeitmomente dt die Geschwindigkeit gdt, so erhält er durch ihre fortgesetzte Wirkung während der Zeit t die Geschwindigkeit gt. Nennen wir diese v, so ist:

u : v = f : g; ferner ist aber auch:

p : q = fdt : gdt (§. 21.) = f : g,

folglich wird p : q = u : v, oder:

die Geschwindigkeiten, die zwey ungleiche Kräfte einzeln genommen einem Punkte in einerley Zeit ertheilen, indem sie während dieser Zeit unabläßig auf ihn wirken, verhalten sich gerade so, wie die Kräfte.

§. 25.

Demnach verhalten sich auch die Räume, die der Punkt in einer gegebenen Zeit t zurücklegt, indem während derselben die eine oder die andere von beyden Kräften p und q beständig auf ihn wirkt, direkt wie diese Kräfte.

Man nenne nemlich diese Räume y und z, so hat man:

$ut = 2y$, und $vt = 2z$ (§. 15. 5.), alſo

$y : z = u : v$, folglich auch

$y : z = p : q$

§. 26.

Bewegt ſich der Punkt in dem Augenblicke, wo die Kraft p auf ihn zu wirken anfängt, oder für $t = o$, ſchon mit irgend einer Geſchwindigkeit $= c$, und zwar nach eben der Richtung, die die Kraft hat, ſo leidet dieſe von Zeit zu Zeit fortwährende Aenderungen; wir wollen ſetzen, ſie ſey nach Verlauf der Zeit t zu u angewachſen.

Da ſie durch die Kraft in jedem Zeittheilchen dt den Zuwachs fdt bekommt, ſo iſt jedesmal $du = fdt$, alſo $u = Conſt + ft$, und weil für $t = o$, $u = c$ war, ſo hat man $Conſt = c$, folglich $u = c + ft$.

Der Punkt hat alſo auch in dieſem Falle eine gleichförmig beſchleunigte Bewegung (§. 14.).

§. 27.

Wirkt die Kraft der anfänglichen Bewegung des Punktes entgegen, ſo verzögert ſie dieſelbe in jedem Augenblicke, und zwar auf folgende Art:

Die Geſchwindigkeit des Punktes ſey Anfangs $= c$, nach Verlauf der Zeit t aber $= u$, ſo macht der Punkt im nächſten dt vermöge ſeiner Trägheit den Weg $= udt$; die Kraft giebt ihm aber in eben dem Augenblicke die entgegengeſetzte Geſchwindigkeit fdt, oder treibt ihn um fdt zurück, alſo durchläuft er in dieſem dt nur den Raum $udt - fdt$.

Wird dieſer durch dt dividirt, ſo erhält mat ſeine eigentliche Geſchwindigkeit während dieſes theilchens u = fdt. Es wird alſo du = — folglich u = Conſt — ft, und da für t = o, u iſt: Conſt = c, oder u = c — ft

Die Kraft bewirkt demnach hier eine gleichfö verminderte Bewegung (§. 16.).

Zweites Kapitel.

Von der fortgehenden Bewegung ei Körpers in gerader Linie.

§. 28.

Man ſagt von einem feſten Körper, er habe eine f gehende Bewegung, wenn ſich alle Punkte in ihm gleich mit einerley Geſchwindigkeit und nach paral Richtungen fortbewegen.

§. 29.

Die Möglichkeit einer ſolchen Bewegung erh leicht. Es iſt nemlich klar, daß die Bewegung e feſten Körpers überhaupt nichts weiter vorausſetze, daß dabey jeder ſeiner Punkte von andern ſtets dieſ Entfernung behalte; eine Bedingung, die im ge wärtigen Falle offenbar erfüllt wird. Wichtiger iſt gegen eine zweyte Frage: was für Kräfte ſind es,

durch dem Körper eine fortgehende Bewegung ertheilt werden kann?

Um dieſe zu beantworten, denke man ſich den ganzen Körper, deſſen Maſſe = M ſeyn mag, in lauter gleiche Elemente, jedes = m getheilt, und ſetze, auf jedes dieſer Elemente wirke eine gleich große Kraft p nach einer Richtung; ſo werden ſie insgeſammt zu gleicher Zeit nach dieſer gemeinſchaftlichen Richtung mit gleicher Geſchwindigkeit fdt fortgehen, d. h. der ganze Körper wird dadurch eine fortgehende Bewegung erhalten, deren Geſchwindigkeit = fdt iſt.

§. 30.

In der Statik iſt §. 74. gezeigt worden, daß einem ſolchen Syſteme von Elementarkräften ihre Summe, nach eben der Richtung auf den Schwerpunkt des Körpers angebracht, äquipollent ſey, oder eben das thue, was durch alle dieſe Kräfte in Verbindung bewirkt wird.

Dieſe Kraft ſetzt alſo den Körper ebenfalls in eine fortgehende Bewegung, und ertheilt ihm eben die Geſchwindigkeit fdt, die ſeine Elemente, jedes durch die einzelne Kraft p getrieben, gemeinſchaftlich erhalten würden.

§. 31.

Da im vorhergehenden Falle (§. 29.) der Kräfte p ſo viele auf den Körper wirken müſſen, als gleiche Elemente m in ihm enthalten ſind, ſo iſt ihre Anzahl $= \frac{M}{m}$, folglich ihre Summe $= \frac{Mp}{m}$.

Demnach erhält der ganze Körper durch die Kra $\frac{Mp}{m}$, die man auf seinen Schwerpunkt wirken läßt, d Geschwindigkeit fdt, wofern man der Kraft p ebe diese Wirkung auf das einfache Element m zueigne Hieraus fließen folgende zwey Sätze:

§. 32.

I. Die Geschwindigkeiten fdt und gdt, die zwe Kräfte P und Q einerley Masse im ersten Augenblic der Wirkung ertheilen, wenn sie auf den Schwerpun derselben angebracht werden, verhalten sich wie die Kräfte.

Beweis. 1) Um einem Elemente m dieser Mas die Geschwindigkeit fdt zu ertheilen, sey die Kraft erforderlich, so ist $P = \frac{Mp}{m}$, also $p = \frac{mP}{M}$.

2) Um eben dem Elemente die Geschwindigke gdt zu ertheilen, sey die Kraft q nöthig, so hat ma $Q = \frac{Mq}{m}$, also $q = \frac{mQ}{M}$; und außerdem ist

3) $p : q = fdt : gdt$ §. 21.), folglich auch:

$$\frac{mP}{M} : \frac{mQ}{M} = fdt : gdt, \text{ oder:}$$

$$P : Q = fdt : gdt.$$

§. 33.

II. Zwey Kräfte P und Q, die verschiedene Mas M und N einerley Geschwindigkeit fdt ertheilen soll müssen mit diesen Massen in einerley Verhältnisse steh

Denn wenn die Kraft p eben dieſe Geſchwindigkeit fdt dem Elemente m ertheilt, ſo iſt $P = \frac{Mp}{m}$ (§. 31.), und $Q = \frac{Np}{m}$, alſo $P : Q = M : N$.

§. 34.

Lehrſatz. Wenn die Kraft P der Maſſe M im erſten Zeittheilchen dt die Geſchwindigkeit fdt, und die Kraft Q der Maſſe N in eben dem Zeittheilchen die Geſchwindigkeit gdt ertheilt, ſo iſt

$P : Q = Mf : Ng$.

Beweis. 1) Es erhalte die Maſſe M von einer dritten Kraft R die Geſchwindigkeit gdt, ſo iſt

$P : R = f : g$ (§. 32.); ferner iſt:

2) $R : Q = M : N$ (§. 33.), folglich.

2) $P : Q = Mf : Ng$.

§. 35.

Wenn die Kraft P ihre Wirkung auf die Maſſe M ununterbrochen eine beſtimmte Zeit t hindurch fortſetzt, ſo bekommt dieſe dadurch die Geſchwindigkeit ft (§. 23.). Eben ſo bekommt die Maſſe N in eben der Zeit durch die Kraft Q die Geſchwindigkeit gt; nennen wir alſo erſtere $= u$, letztere $= v$, ſo wird:

$u : v = f : g$, folglich

$Mu : Nv = Mf : Ng$, mithin:

$Mu : Mv = P : Q$, oder:

$$u : v = \frac{P}{M} : \frac{Q}{N}.$$

welches ſo viel ſagen will:

Körper in eben der Zeit eben so tief falle, als der andere. Durch Versuche, deren Gründe sich hier noch nicht erörtern lassen, hat man gefunden, daß der Fallraum der Körper in der ersten Sekunde 15,09568 pariser Fuß betrage, welches nach rheinl. Maaße ungefähr 15,625 Fuß ausmacht. Diesen Raum wollen wir ins Künftige mit dem Buchstaben g bezeichnen.

§. 39.

1. Ein Körper, der aus der Ruhe frey herabfällt, legt demnach in einer Zeit von t Sekunden den Raum $s = gt^2$ zurück, und erlangt zu Ende dieser Zeit die Geschwindigkeit $v = 2gt$ (§. 15.).

2. Hieraus wird $s = \frac{v^2}{4g}$, und gegenseitig $v = 2\sqrt{gs}$. Es sind also auch s und v von einander abhängig, oder wenn man weiß, wie tief ein Körper gefallen ist, der Anfangs in Ruhe war, so bestimmt dies zugleich die Geschwindigkeit, die er zuletzt bekommen hat, ohne daß man dabey die Zeit des Fallens in Betracht zu ziehen braucht.

3. Wegen dieser Beziehung zwischen s und v nennt man v, die der Fallhöhe s zugehörige Geschwindigkeit, und gegenseitig s die der Geschwindigkeit v zugehörige Fallhöhe.

Anmerk. Man setze den Raum, durch den die Schwere den Körper in jedem Zeittheilchen dt fortbewegt, $= \varkappa dt^2$, so ist dies die Tiefe, zu der er sogleich im ersten dt herabsinkt. Um eben so viel sinkt er also vermöge seiner Trägheit auch im zweyten dt, und wird zugleich von der Schwere noch um $\varkappa dt^2$ weiter getrieben, so daß er in diesem Zeittheilchen

den Weg $2\varkappa dt^2$ zurücklegt. Auf gleiche Art ist sein Fallraum im dritten $dt = 3\varkappa dt^2$, und überhaupt im nten $= n\varkappa dt^2$, weil ihm die Schwere in jedem folgenden dt um $\varkappa dt^2$ weiter forttreibt.

Wenn man alle diese kleinen Räume zusammennimmt, so erhält man für die Tiefe, zu der der Körper in der Zeit ndt herabgesunken ist, $\frac{n(n+1)}{2} \cdot \varkappa dt^2$. Diese setze man $= s$, und die Zeit $ndt = t$, so wird $n^2 dt^2 = t^2$, also $s = \frac{1}{2} n^2 \varkappa dt^2 + \frac{1}{2} n \varkappa dt^2 = \frac{1}{2} \varkappa t^2 + \frac{1}{2} \varkappa t dt$; wovon letzterer Theil gegen den erstern wegfällt.

Da nun auch $s = gt^2$, so bekommt man $\varkappa = 2g$, mithin für den Raum, durch den die Schwere den Körper in jedem dt forttreibt, $2gdt^2$.

Aus dieser Betrachtung erhellet, daß die Formel $s = gt^2$ nur alsdann vollkommen richtig sey, wenn man berechtigt ist, den Theil $\frac{1}{2} \varkappa t dt = g.dt$, als eine Größe, die sich nicht angeben läßt, aus ihr wegzulassen. Gesetzt aber, es würde in der Folge einmal entdeckt, daß die Schwere eigentlich nicht kontinuirlich, sondern von Zeit zu Zeit durch Impulse auf den Körper wirke, so bekäme das Zeittheilchen dt einen endlichen, wenn gleich sehr geringen, Werth, und die gedachte Formel bliebe alsdann selbst für ein endliches t nicht mehr ganz richtig. Um wie viel sie aber in diesem Falle von der Wahrheit abweiche, ließe sich leicht aus dem weggelassenen Gliede $gtdt$ beurtheilen.

§. 40.

Wenn der Körper in dem Augenblicke, wo er anfängt zu fallen, schon eine Geschwindigkeit c nach vertikal herabwärts gehender Richtung hat, so erlangt er in der Zeit t die Geschwindigkeit $c + 2gt$, und legt während derselben den Raum $ct + gt^2$ zurück (§. 14.).

§. 41.

Aufgabe. Ein Körper wird in A mit der Ge-

ten zum Grunde legen. Zu dem Ende soll ins Künftige das Gewicht der Masse = 1 zur allgemeinen Einheit der Kräfte dienen, wodurch Masse und Gewicht einerley wird: denn es sey das Gewicht der Masse M = P, so ist nach jener Festsetzung 1 : M = 1 : P (§. 36.), folglich P = M.

§. 43.

Aufgabe. Eine unveränderliche Kraft P wirkt fortdauernd auf den Schwerpunkt eines Körpers, dessen Masse = M ist, nach einerley Richtung, und ertheilt ihm also eine fortgehende gleichförmig beschleunigte Bewegung. Man fragt, um wie viel der Körper in einer bestimmten Zeit t fortrücke, und welche Geschwindigkeit er zu Ende dieser Zeit erlangt habe.

Aufl. 1) Man setze den gesuchten Raum = s, die Geschwindigkeit = u, so ist nach den Gesetzen der gleichförmig beschleunigten Bewegung $s = \frac{1}{2}ut$ (§. 15. 5.).

2) Der Körper bekommt beym Fallen, oder durch die fortgesetzte Wirkung seines eigenen Gewichtes M, in der Zeit t die Geschwindigkeit 2gt. Setzt man also in §. 35. sowohl die Masse N, als die Kraft Q = M, und $v = 2gt$, so erhält man:

$$u : 2gt = \frac{P}{M} : 1, \text{ oder}$$

$$u = \frac{2gPt}{M}.$$

3) Und daraus wird $s = \frac{1}{2}ut = \frac{gPt^2}{M}$.

4) Hat der Körper zu Anfange der Zeit t nach

der Richtung der Kraft schon eine Geschwindigkeit = c, so wird zu Ende derselben $u = c + \frac{2gPt}{M}$ (§. 14.).

5) Ist dagegen die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit c der Richtung der Kraft entgegengesetzt, so wird die Bewegung des Körpers durch die Kraft verzögert, und es ist nach Verlauf der Zeit t seine Geschwindigkeit $u = c - \frac{2gPt}{M}$.

§. 44.

Aufgabe. Die Bewegung eines Körpers zu bestimmen, der von einer schiefen Ebene herabgleitet. Fig. 2.

Aufl. 1) Das Gewicht des Körpers, das wir = M setzen wollen, wirkt unmittelbar aus seinem Schwerpunkte o nach der Vertikale ov. Weil aber der Körper gezwungen ist, sich längs der schiefen Ebene CA zu bewegen, so zerlege man sein Gewicht in zwey Kräfte P und Q nach den Richtungen op und oq, wovon erstere mit der Ebene parallel, letztere senkrecht darauf ist.

2) Setzt man den Neigungswinkel der Ebene CAB = I, so wird P = M Sin I, Q = M Cos I.

3) Letztere drückt gegen die Ebene senkrecht, und wird also dadurch aufgehoben, so daß sie zur Bewegung des Körpers nichts beytragen kann.

4) Durch erstere hingegen bekommt der Körper, weil ihre Richtung durch seinen Schwerpunkt geht, eine

förmig zunehmender Geschwindigkeit in der Zeit t zu einer Tiefe $= gt^2\left(\frac{P-T}{P}\right) = gt^2\left(1-\frac{T}{P}\right)$.

4) Da nun Körper und Gewicht wegen ihrer Verbindung in einerley Zeit um gleich viel fortrücken müssen, so hat man:

$$gt^2 \cdot \left(1-\frac{T}{P}\right) = \frac{gt^2T}{M} \text{ oder}$$

$$1-\frac{T}{P} = \frac{T}{M}.$$

5) Daher wird $1 = T\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{P}\right) = \frac{T(M+P)}{MP}$;

folglich $T = \frac{MP}{M+P}$.

6) Also der Raum, den beyde in der Zeit t zurücklegen, $= \frac{gTt^2}{M} = \frac{gPt^2}{M+P}$, und die Geschwindigkeit beyder zu Ende dieser Zeit $= \frac{2gPt}{M+P}$.

§. 47.

Unter den Hindernissen, die die eben betrachtete Bewegung verzögern können, ist das Reiben zwischen der Grundfläche des Körpers A, und dem Boden, worauf er fortgezogen wird, das beträchtlichste. Setzt man dies $= \lambda M$, und betrachtet den Coefficienten λ als unveränderlich, so ist $T - \lambda M$ die Kraft, die den Körper nach horizontaler Richtung forttreibt, folglich

r Raum, den er in der Zeit t zurücklegt, $= gt^2 \cdot \frac{1-\lambda M}{M}$). Man erhält also jetzt:

$$1 - \frac{T}{P} = \frac{T}{M} - \lambda, \text{ oder}$$

$$1 + \lambda = \frac{T}{M} + \frac{T}{P} = \frac{T(M+P)}{MP}; \text{ folglich:}$$

$$T = \frac{(1+\lambda)\,MP}{M+P}.$$

Nennt man daher S den Raum, um den die Masse in der Zeit t fortrückt, oder das Gewicht P herabsinkt, so wird: $S = \left(\frac{(1+\lambda)\,P}{M+P} - \lambda\right) : gt^2 = \left(\frac{1-\lambda M}{M+P}\right) gt^2$.

§. 48.

Aus dieser Formel erhält man gegenseitig:

$$\lambda = \frac{P}{M} - \frac{(M+P)\,S}{gMt^2}.$$

ird also die Zeit genau beobachtet, in der das Gewicht P zu einer bestimmten Tiefe S herabsinkt, so läßt h daraus bestimmen, wie viel der Reibungskoefficient bey wirklichen Bewegungen betrage.

Exempel. $M = 25\frac{1}{4}$ ℔, $P = 7$ ℔, $s = 55$ gl. Zoll, oder nach rheinl. Maaße $= 4{,}4515$ Fuß, $= 4''$, giebt

$$\lambda = \frac{28}{103} - \frac{4{,}4515 \times 131}{15{,}625 \times 103 \cdot 16} = 0{,}2718 - 0226 = 0{,}2492, \text{ also beynahe } \lambda = \tfrac{1}{4}.$$

verflossenen Zeit, oder von dem Raume abhängen mag, den die Masse während derselben zurückgelegt hat; man sucht ihre Bewegung.

Aufl. 1) Es sey der Raum, den die Masse in der Zeit t durchlaufen ist, $= x$, die Geschwindigkeit, die sie zu Ende dieser Zeit bekommen hat, $= v$, so ist zuvörderst $v = \frac{dx}{dt}$ (§. 11.). Es kommt also nur darauf an, für jede Zeit t den Werth von v zu bestimmen.

2) Da sowohl die Kraft P, als die Geschwindigkeit v von der Zeit t abhängt, so leiden beyde mit ihr zugleich Aenderungen. Wir wollen setzen, die Kraft P bekomme für die Aenderung der Zeit $= \Delta t$ den Zuwachs $= \Delta P$, die Geschwindigkeit den Zuwachs $= \Delta v$, so ist ersterer nach Verlauf der Zeit $t + \Delta t = P + \Delta P$, letztere $= v + \Delta v$.

3) Bliebe die Kraft P während des Zeittheils Δt ungeändert, so würde der Körper von dem Augenblicke an, wo er die Geschwindigkeit v hat, mit gleichförmig beschleunigter Bewegung fortgehen, und würde nach Verlauf der Zeit Δt die Geschwindigkeit $v + \frac{2gP\Delta t}{M}$ erhalten (§. 43. 4.).

4) Diese muß also nothwendig geringer als $v + \Delta v$ seyn, weil die Kraft während Δt noch gewachsen ist. Man hat folglich:

$$\Delta v > \frac{2gP\Delta t}{M}, \text{ oder}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} > \frac{2gP}{M}.$$

5) Wäre dagegen der Körper von eben dem Augenblicke an die Zeit Δt über der beständigen Wirkung der Kraft $P+\Delta P$ ausgesetzt, so bekäme er am Ende derselben die Geschwindigkeit $v + \frac{2g(P+\Delta P)\Delta t}{M}$.

6) Offenbar ist diese größer als $v + \Delta v$: denn die Kraft, die den Körper während Δt beschleunigt, ist ja erst zu Ende dieser Zeit zu $P+\Delta P$ völlig angewachsen, folglich innerhalb Δt beständig geringer als $P+\Delta P$. Man hat also ferner:

$$\Delta v < \frac{2g(P+\Delta P)\Delta t}{M}, \text{ oder}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} < \frac{2g(P+\Delta P)}{M}.$$

7) Der Quotient $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ liegt daher stets innerhalb der Grenzen $\frac{2gP}{M}$ und $\frac{2g(P+\Delta P)}{M}$, und ist folglich von $\frac{2gP}{M}$ weniger verschieden, als um $\frac{2g\Delta P}{M}$.

8) Man lasse nun Δt unendlich abnehmen, so nimmt zugleich ΔP; folglich auch $\frac{2g\Delta P}{M}$ unendlich ab; also nähert sich $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ unendlich der Grenze $\frac{2gP}{M}$, weil beyder Unterschied allemal geringer als $\frac{2g\Delta P}{M}$ ist, mithin ebenfalls eine unendliche Abnahme leiden muß.

9) Zugleich aber nähert sich auch bey eben der Voraussetzung $\frac{\Delta v}{dt}$ unendlich der Grenze $\frac{dv}{dt}$; daher wird

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2gP}{M},$$

10) Man erhält demnach durch Integrirung dieser Gleichung:

$$v = C + \frac{2g}{M}\int P dt$$

11) Es bleibt noch der Fall zu betrachten übrig, wo die Kraft P nach und nach abnimmt, also für die Zeit $t + \Delta t = P - \Delta P$ wird. Diese Voraussetzung giebt

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} < \frac{2gP}{M}, \text{ und}$$
$$\frac{\Delta v}{\Delta t} < \frac{2g(P - \Delta P)}{M};$$

woraus wieder eben die Gleichung $\frac{dv}{dt} = \frac{2gP}{M}$ auf die nemliche Weise, wie (7) und (8), sich herleiten läßt.

§. 51.

1. Da $v = \frac{dx}{dt}$, so wird $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Dieser Werth für $\frac{dv}{dt}$ in der eben gefundenen Gleichung substituirt, giebt also:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2gP}{M}.$$

eine Gleichung zwischen x, P und t, worin man x und P als Funktionen von t betrachtet, oder nach der

gewöhnlichen Sprachgebrauch: worin dt als beständig angenommen wird.

2. Es sey h die der Geschwindigkeit v zugehörige Fallhöhe (§. 39. 3.), so hat man $h = \frac{v^2}{4g}$, und wenn auf beyden Seiten differenziirt wird: $dh = \frac{vdv}{2g}$.

Nun ist $v = \frac{dx}{dt}$, und $dv = \frac{2gPdt}{M}$, also $vdv = \frac{2gPdx}{M}$; folglich wird: $dh = \frac{Pdx}{M}$, oder

$$Mdh = Pdx.$$

Diese Gleichung ist in manchen Fällen, vorzüglich da, wo die Kraft P unmittelbar von x abhängt, leichter anzuwenden, als die vorige.

§. 52.

Exempel. Wenn wir nach dem allgemeinen Gesetze der Gravitation annehmen, daß das Gewicht eines Körpers in einerley Vertikale sich verkehrt, wie das Quadrat seiner Entfernung vom Mittelpunkte der Erde verhalte, so treibt ihn während seines Fallens eine veränderliche Kraft, die nach und nach zunimmt, so wie der Körper zu einer größern Tiefe gelangt. Es sey nemlich nach dieser Voraussetzung der Halbmesser der Erde $= a$, das Gewicht der Masse M in der Entfernung z von ihrem Mittelpunkte $= P$, an ihrer Oberfläche, oder für $z = a$, $= M$, wie im §. 42. festgesetzt ist, so erhält man $P : M = a^2 : z^2$, also $\frac{P}{M} = \frac{a^2}{z^2}$.

Man ſetze nun, der Körper befinde ſich Anfangs über der Oberfläche der Erde in einer Höhe $= f$, ſo iſt daſelbſt ſeine Entfernung von ihrem Mittelpunkte $= a + f$. Nachdem er zur Tiefe $= x$ herabgefallen iſt, gehöre ſeine Geſchwindigkeit der Fallhöhe $= h$ zu, ſo wird $z = a + f - x$, alſo: $dz = -dx$, folglich

$$dh = -\frac{Pdz}{M} = -\frac{a^2 dz}{z^2}$$

$$h = C + \frac{a^2}{z}$$

Für $z = a + f$ war des Körpers Geſchwindigkeit, folglich auch $h = o$, alſo wird $C = \frac{-a^2}{a+f}$, oder

$$h = \frac{a^2}{z} - \frac{a^2}{a+f}.$$

Wenn der Körper den Boden erreicht, ſo iſt $z = a$. Es werde alsdann $h = H$, ſo bekommt man

$$H = a - \frac{a^2}{a+f} = \frac{af}{a+f}.$$

Die gewöhnliche Vorausſetzung, daß in jeder Höhe $\frac{P}{M} = 1$ ſey, giebt nun $H = f$; alſo um $f - \frac{af}{a+f} = \frac{f^2}{a+f}$ zu groß. Daß dieſe Abweichung auf jeden Fall außer Acht gelaſſen werden könne, wird folgendes Beyſpiel zeigen:

Ein Aeroſtat ſey über der Oberfläche der Erde zu einer Höhe von 1500 Toiſen hinaufgeſtiegen. Man läßt aus ihm ein Gewicht von dieſer Höhe herabfallen; es fragt ſich, mit welcher Geſchwindigkeit dies den Boden treffen werde?

Hier ist f = 1500, und wenn man für a den mittlern Werth = 3275000 Toisen annimmt; $\frac{f^2}{a+f}$ $= \frac{22500}{32765} = 0{,}687$; also H = 1499,313 Toisen = 8995,878 Fuß, und die gesuchte Geschwindigkeit = $\sqrt{4gH}$ = 749,828 Fuß. Dagegen gehört zur Höhe f die Geschwindigkeit $\sqrt{4gf}$ = 750,000 Fuß

Differenz = 0,172 Fuß

die noch kein $\frac{1}{4000}$ von letzterer ausmacht.

§. 53.

Wenn im §. 50. der Körper Anfangs eine Geschwindigkeit c gegen die Richtung der Kraft P hat, so wird seine Bewegung durch die Kraft verzögert: er behält aber dabey seine anfängliche Richtung so lange, als ihm noch eine Geschwindigkeit nach derselben übrig bleibt.

1) Sie sey nach Verlauf der Zeit $t = v$; im nächsten Δt ändere sie sich um Δv, so wird sie für $t + \Delta t = v + \Delta v$.

2) Eben so wird die Kraft für $t + \Delta t = P + \Delta P$, wo ΔP entweder positiv oder negativ ist, je nachdem P mit zunehmenden t wächst oder abnimmt.

3) Bliebe die Kraft während des Zeittheils Δt unverändert, so litte unterdeß v eine gleichförmige Abnahme, und würde zu Ende dieses Zeittheils $= v - \frac{2gP\Delta t}{M}$ (§. 43.)

4) Wirkte dagegen diese Zeit hindurch beständig die Kraft $P + \Delta P$ der Bewegung entgegen, so würde die Geschwindigkeit zu Ende derselben $= v - \frac{2g(P + \Delta P)\Delta t}{M}$.

5) Folglich fällt $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ innerhalb der Grenzen $-\frac{2gP}{M}$ und $-\frac{2g(P+\Delta P)}{M}$, und nähert sich ersterer Grenze unendlich, wenn man Δt unendlich abnehmen läßt.

6) Daher hat man $\frac{dv}{dt} = -\frac{2gP}{M}$, oder

$$Mdv = -2gPdt; \text{ also}$$

$$Mv = \text{Const} - 2g\int Pdt$$

wo das Integral $\int Pdt$ so genommen werden muß, daß es für $t = o$ verschwindet.

7) Nun ist für $t = o$, $v = c$; also $\text{Const} = Mc$, mithin:

$$Mv = Mc - 2g\int Pdt.$$

§. 54.

Es seyen H, h die den Geschwindigkeiten c, v zugehörigen Fallhöhen, oder $H = \frac{c^2}{4g}$, $h = \frac{v^2}{4g}$, so wird $dh = \frac{vdv}{2g}, = -\frac{Pdt}{M} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{Pdx}{M}$, folglich

$$Mh = C - \int Pdx,$$

und da für $x = o$, $v = c$, oder $h = H$ ist, so erhält man $C = MH$, wofern das Integral $\int Pdx$

ſo genommen wird, daß es für $x = o$ verſchwindet; daher endlich:

$$Mh = MH = \int Pdx.$$

Drittes Kapitel.

Von der fortgehenden Bewegung der Körper in krummen Linien.

§. 55.

Stat. Fig. 8. Der Schwerpunkt C eines Körpers bekomme durch die augenblickliche Wirkung einer Kraft p nach der Richtung CA die Geſchwindigkeit $u = CA$, oder werde durch ſie in eine gleichförmige Bewegung geſetzt, wobey er durch dieſen Raum in einer Sekunde fortgeht (§. 8.); eine andere Kraft q ertheile ihm für ſich allein nach der Richtung CB die Geſchwindigkeit $v = CB$; ich behaupte, beyde Kräfte in Verbindung werden den Punkt nach der Diagonale CD des Parallellograms ACBD forttreiben, und ihm eine Geſchwindigkeit geben, womit er in einer Sekunde den Weg CD zurücklegt.

Beweis. 1) Da zwey Kräfte ſich wie die Geſchwindigkeiten verhalten, die ihnen einerley Maſſe im erſten Augenblicke ihrer Wirkung ertheilen (§. 32.), ſo iſt hier $p : q = u : v$, oder, wenn man CA ſtatt u, und CB ſtatt v ſetzt, $p : q = CA : CB$.

kommt, die aus u und v zusammengesetzt ist. Macht man nemlich mp = vΔt, so sind mo und mp die Räume, die er in einerley Zeit, erstern vermöge seiner Trägheit, letztern vermöge der Wirkung der Kraft, durchlaufen würde; er nimmt also seinen Weg nach der Diagonale mn des Parallellograms monp, und beschreibt in derselben Zeit Δt das Stück mn, so daß also sowohl seine Richtung, als seine Geschwindigkeit durch die Kraft verändert wird.

§. 58.

Aufgabe. Auf den Schwerpunkt eines Körpers, dessen Masse = M ist, wirken fortdauernd drey Kräfte P, Q und R nach Richtungen, die beständig mit den dreyen auf einander senkrechten Linien OA, OB und OC parallel sind. Man sucht für eine gegebene Zeit t seinen Ort, und die Geschwindigkeit an demselben.

Fig. 5. **Aufl.** 1) Es sey zu Anfange der Bewegung der Schwerpunkt des Körpers in A, nach Verlauf der Zeit t in m, und seine Geschwindigkeit daselbst = v. Um die Lage des Punktes m zu bestimmen, fälle man aus ihm auf die Ebene AOB das Perpendikel mq, und aus q auf OA, in dieser Ebene selbst, das Perpendikel qp, und setze die drey rechtwinklichten Koordinaten Op = x, pq = y, qm = z. Außerdem sey noch der durchlaufene Raum des Körpers Om = s; so sind x, y, z, s und v Größen, die sich mit der Zeit t zugleich ändern, also von dieser gemeinschaftlich abhängen;

jen; ſo wie dies auch bey den Kräften P, Q und R der Fall ſeyn mag.

2) Wenn daher in zweyen folgenden gleich großen Zeittheilchen Δt der Schwerpunkt des Körpers aus m nach m′ und m″ fortrückt, ſo wachſen die Größen x, y z und s im nächſten Δt um Δx, Δy, Δz und Δs, und im folgenden Δt um $\Delta (x + \Delta x) = \Delta x + \Delta^2 x$, $\Delta y + \Delta^2 y$, $\Delta z + \Delta^2 z$ und $\Delta s + \Delta^2 s$. Zugleich iſt im m′ die Geſchwindigkeit des Körpers $= v + \Delta v$, und die drey Kräfte P, Q und R werden daſelbſt $= P + \Delta P$, $Q + \Delta Q$ und $R + \Delta R$.

3) Man nehme zuerſt an: dieſe Kräfte wirken von Zeit zu Zeit durch Impuiſe auf den Körper, und zwar jedesmal zu Anfange eines Zeittheils Δt, oder in den einzelnen Punkten ſeines Weges m, m′, m″ u. ſ. w.; ſo durchläuft der Körper jeden der kleinen Räume mm′, m′m″ u. ſ. w. gleichförmig, und nach einerley Richtung; es wird alſo $\Delta s = v\Delta t$, $\Delta s' = v'\Delta t$, oder $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, $v' = \frac{\Delta s'}{\Delta t}$.

4) Zerlegt man demnach die Geſchwindigkeit v in eine nach mv, der Verlängerung von qm, oder parallel mit OC, und in eine darauf ſenkrechte nach mr, ſo wird erſtere $= \frac{\Delta s}{\Delta t} \operatorname{Sin} m'mr = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{mv}{mm} = \frac{\Delta z}{\Delta t}$, letztere $= \frac{\Delta s}{\Delta t} \operatorname{Cos} m'mr = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{mr}{mm'} = \frac{mr}{\Delta t} = \frac{qq'}{\Delta t}$, welche noch in eine nach qo, oder parallel mit $OA = \frac{qq'}{\Delta t}$.

$\text{Cos } q'qo = \frac{qq'}{\Delta t} \cdot \frac{qo}{qq'} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, und in eine, parallel mit OB, $= \frac{qq'}{\Delta t} \text{ Sin } q'qo = \frac{qq'}{\Delta t} \cdot \frac{oq'}{qq'} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ zerfällt.

5) Eben so giebt die Geschwindigkeit v' nach den mit QA, OB und OC parallelen Richtungen die drey Geschwindigkeiten: $\frac{\Delta x'}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y'}{\Delta t}$, und $\frac{\Delta z'}{\Delta t}$.

6) Also ändern sich die Geschwindigkeiten $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ und $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ die der Körper nach den drey Richtungen OA, OB und OC hat, während er sich durch mm' bewegt, im nächsten Δt in $\frac{\Delta x'}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y'}{\Delta t}$ und $\frac{\Delta z'}{\Delta t}$ um.

7) Hätte in m keine Kraft auf ihn gewirkt, so würde er in diesem folgenden Zeittheile vermöge seiner Trägheit eben den Raum Δs nach eben der Richtung mm' zurückgelegt haben; es würden daher auch seine Geschwindigkeiten nach OA, OB, OC noch dieselben geblieben seyn. Die Aenderungen also, die sie in m erleiden, sind bloß Wirkungen der Kräfte $P + \Delta P$, $Q + \Delta Q$, $R + \Delta R$, die den Körper nach diesen Richtungen daselbst aufs neue beschleunigen.

8) Daher sind die Unterschiede $\frac{\Delta x'}{\Delta t} - \frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y'}{\Delta t} - \frac{\Delta y}{\Delta t}$ und $\frac{\Delta z'}{\Delta t} - \frac{\Delta z}{\Delta t}$, oder $\frac{\Delta^2 x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta t}$ und $\frac{\Delta^2 z}{\Delta t}$, die

ſchwindigkeiten, die der Körper in m durch jene
äfte unmittelbar bekommen hat.

9) Geſetzt nun, die Schwere wirkte beym Fallen
Körper auf eben die Art, wie vorhin (3) angenom-
n iſt, ſo ertheilte ſie bey jedem Impulſe dem Körper
Geſchwindigkeit $= 2g\Delta t$ (§. 39. Anmerk.); dem
Folge ertheilen ihm alſo die Kräfte $P + \Delta P$,
$+ \Delta Q$ und $R + \Delta R$ nach ihren Richtungen die Ge-
windigkeiten $\frac{2g\Delta t\,(P+\Delta P)}{M}$, $\frac{2g\Delta t\,(Q+\Delta Q)}{M}$
d $\frac{2g\Delta t\,(R+\Delta R)}{M}$.

10) Da dieſe mit den vorigen (8) einerley ſeyn
ſſen, ſo erhält man

$$\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2} = \frac{2g\,(P+\Delta P)}{M},$$
$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2} = \frac{2g\,(Q+\Delta Q)}{M},$$
$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta t^2} = \frac{2g\,(R+\Delta R)}{M}.$$

11) Wegen der Bedingung, daß die Kräfte P,
und R kontinuirlich auf den Körper wirken ſollen,
d nun dieſe Gleichungen allemal fehlerhaft, ſo bald
n dem Zeittheile Δt irgend einen beſtimmten Werth
legt; man ſieht aber leicht, daß ſie der Wahrheit
ſto näher kommen müſſen, je kleiner man darin Δt
nimmt.

12) Daraus folgt demnach, daß man die völlig
htigen Gleichungen der Aufgabe erhalte, wenn man

für die Ausdrücke, die in jenen vorkommen, die G
zen ſubſtituirt, denen ſie ſich bey unendlicher Abn
von Δt unendlich nähern. Daher wird

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{2gP}{M},\ \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{2gQ}{M},\ \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{2gR}{M},$$ und a

dem bekommt man (3) $v=\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+d}}{dt}=$

woraus ſich alles herleiten läßt, was man von der
wegung des Körpers zu wiſſen verlangt.

§. 59.

1. Da die Punkte m, m', m'' unendlich nah
ſammenrücken, ſo ändert der Schwerpunkt des Kör
jeden Augenblick ſeine Richtung, und bewegt ſich
in einer Linie, von der kein Theil, ſo klein man
auch annehmen mag, gerade iſt; d. h. er beſchreibt
Kurve. Die Beſchaffenheit dieſer Kurve zu fin
dienen die drey erſten Gleichungen (12), die zu
Abſicht durch gegenſeitige Verbindung auf zwey an
zurückgeführt werden müſſen, worin bloß die drey K
dinaten x, y und z vorkommen.

2) Aus der Gleichung für die Geſchwindig
des Körpers:

$$v^2=\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}$$

erhält man durchs Differenziiren:

$$vdv=\frac{dxd^2x}{dt^2}+\frac{dyd^2y}{dt^2}+\frac{dzd^2z}{dt^2},$$

und darin für $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ die Werthe aus (12) substituirt, giebt

$$vdv = \frac{2g}{M}(Pdx + Qdy + Rdz);$$

woraus sich v für jeden Ort des Körpers vermittelst der Koordinaten x, y und z bestimmen läßt.

8. Bezeichnete man durch x, y und z die Räume, die der Körper während der Zeit t nach OA, OB oder OC zurücklegen würde, wenn ihn die Kraft P, Q oder R allein forttriebe, so bekäme man für die Aenderungen dieser Räume (§. 51. 1.) eben die Gleichungen, wie im §. 58. 12. Hieraus erhellet also, daß von den drey Kräften jede einzeln genommen nach ihrer Richtung eben die Wirkung auf den Körper hervorbringt, als wenn die andern beyden gar nicht vorhanden wären.

4. Für den einfachern Fall, wo auf den Körper nur zwey Kräfte P und Q während seiner Bewegung wirken, deren Richtungen in der Ebene AOB liegen, und mit OA und OB parallel sind, wird $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$, also $\frac{dz}{dt} = c$. Wofern nun die Richtung der anfänglichen Bewegung des Körpers gleichfalls in die Ebene AOB fällt, so ist $c = 0$, also $\frac{dz}{dt} = 0$, und folglich auch $z = 0$, weil sich der Körper zu Anfange in O befindet. Daher liegt alsdann die ganze Bahn des Körpers in dieser Ebene, oder ist eine Kurve von einfacher Krüm-

mung, die bloß durch eine Gleichung zwischen den beyden Koordinaten x und y bestimmt wird.

5. Für seine Geschwindigkeit hat man in diesem Falle

$$vdv = \frac{2g}{M}(Pdx + Qdy).$$

Bewegung des Körpers auf vorgeschriebenem Wege.

§. 60.

Fig. 6. Es sey AMD ein gekrümmter Kanal in einer horizontalen, oder andern beliebigen Ebene ABD; ein Körper, dessen Masse = M ist, bekomme in A die Geschwindigkeit = c nach der anfänglichen Richtung des Kanales, und bewege sich nun, ohne daß äußere Kräfte weiter auf ihn wirken, innerhalb demselben fort.

Da der Körper gezwungen ist, seinen Weg nach der Kurve AMD zu nehmen, so übt er fortdauernd einen Druck senkrecht gegen die Wand des Kanales aus, und leidet also von dieser einen eben so großen Gegendruck, wovon wir annehmen wollen, daß seine mittlere Richtung durch den Schwerpunkt des Körpers gehe, so daß dessen Bewegung längs dem Kanale beständig fortgehend bleibt.

Man setze diesen Druck für irgend eine Stelle M, wohin der Körper nach Verlauf einer Zeit t gelangt seyn mag, = Π, und zerlege ihn, da er nach der Normale Mr gerichtet ist, in einen nach Mo, parallel mi

AB, $= \Pi \operatorname{Cos} rMo = \Pi \operatorname{Sin} mMo = \Pi . \frac{dy}{ds}$, und in einen darauf senkrechten nach MP $= \Pi \operatorname{Cos} mMo = \Pi . \frac{dx}{ds}$, so hat man hier

$$P = \frac{\Pi dy}{ds}, \quad Q = -\frac{\Pi dx}{ds}, \quad R = o, \text{ also}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2g\Pi dy}{Mds}, \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2g\Pi dx}{Mds}.$$

Ferner (§. 59. 5.) $vdv = \frac{2g\Pi}{M}(dxdy - dxdy) = o$, mithin $\frac{1}{2}v^2 = A$, $v = \sqrt{2A} = c$.

Der Körper behält also während der ganzen Zeit, da er sich an der Kurve AMD fortbewegt, seine anfängliche Geschwindigkeit unverändert bey.

Um den Druck Π zu bestimmen, substituire man in den beyden erstern Gleichungen für dt seinen Werth $\frac{ds}{c}$, so bekommt man $\frac{c^2d^2x}{ds^2} = \frac{2g\Pi dy}{Mds}$, und $\frac{c^2d^2y}{ds^2} = -\frac{2g\Pi dx}{Mds}$. Ferner setze man den Winkel Mmo, den die Tangente an M mit der Ordinate mp macht, $= \varphi$, und den Krümmungshalbmesser an eben der Stelle $= r$; so wird $r = \frac{ds}{d\varphi}$, $\frac{dx}{ds} = \operatorname{Sin} \varphi$, $\frac{dy}{ds} = \operatorname{Cos} \varphi$, und, weil $ds = cdt$, also ds ebenfalls unveränderlich ist, $\frac{d^2x}{ds^2} = \operatorname{Cos} \varphi d\varphi$, folglich

$d\varphi$

$$\frac{c^2 d^2 x}{ds^2} = \frac{c^2 \operatorname{Cos} \varphi d\varphi}{ds} = \frac{2g\Pi \operatorname{Cos} \varphi}{M}, \text{ oder}$$

$$\Pi = \frac{Mc^2 d\varphi}{2gds} = \frac{Mc^2}{2gr}.$$

Eben dieſen Werth für Π erhält man auch, wenn man ſtatt der hier gebrauchten erſtern Gleichung die zweyte nimmt.

§. 61.

Wir wollen ſetzen, die Kurve AMD ſey ein Kreis; ſo iſt r der Halbmeſſer dieſes Kreiſes, folglich der Druck Π unveränderlich, und da ſeine Richtung auf dem Umfange des Kreiſes ſenkrecht iſt, ſo geht ſie, rückwärts verlängert, durch ſeinen Mittelpunkt.

Ein Körper alſo, der in einem Kreiſe fortzugehen genöthigt iſt, und dabey von keiner fremden Kraft getrieben wird, bewegt ſich nicht allein gleichförmig in demſelben, ſondern hat auch ſtets einerley Beſtreben, ſich nach der Richtung des Halbmeſſers vom Mittelpunkte des Kreiſes zu entfernen. Man nennt dies Beſtreben ſeine **Schwungkraft**.

Es ſey z. B. die Maſſe des Körpers $= 1$ ℔, ſeine Geſchwindigkeit $= 4$ Fuß, der Halbmeſſer des Kreiſes $= 8$ Fuß, ſo iſt ſeine Schwungkraft $\frac{Mc^2}{2gr} = \frac{25}{31\frac{1}{4} \cdot 8} = \frac{1}{10}$ ℔.

§. 62.

Aufgabe. Indem der Körper ſich längs der

Kurve AMD hinbewegt, wirke auf ihn fortwährend eine Kraft V nach seiner jedesmaligen Richtung, oder nach der Tangente der Kurve, durch den Punkt gezogen, woselbst der Körper sich befindet. Man sucht für eine gegebene Zeit t seine Geschwindigkeit v, und den Druck Π, den er gegen die Schranken des Weges ausübt.

Aufl. 1) Man zerlege die Kraft V in eine nach der Richtung $Mo = V \cos mMo = V \cdot \frac{dx}{ds}$, und in eine darauf senkrechte nach $PM = V \sin mMo = V \cdot \frac{dy}{ds}$.

2) Zu diesen addire man noch die Kräfte $\Pi \cdot \frac{dy}{ds}$ und $-\Pi \cdot \frac{dx}{ds}$, worin nach eben den Richtungen der normale Gegendruck Π zerfällt, den der Körper von der Seitenwand des Kanales leidet, so erhält man:

$$P = V \cdot \frac{dx}{ds} + \Pi \cdot \frac{dy}{ds}, \quad Q = V \cdot \frac{dy}{ds} - \Pi \frac{dx}{ds}, \text{ und}$$

$R = o$, also

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2g\,(Vdx + \Pi dy)}{Mds}, \text{ und}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2g\,(Vdy - \Pi dx)}{Mds}.$$

3) Außerdem wird (§. 59. 5.) $vdv = \frac{2gV\,(dx + dy^2)}{Mds} = \frac{zgVds}{M}$, oder, wenn man für v seinen Werth $\frac{ds}{dt}$ setzt:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2gV}{M}.$$

Der Körper wird alſo auf ſeinem krumm linigten Wege durch die Tangentialkraft V ebe ſo beſchleunigt, als wenn er nach unveränderte Richtung von ihr getrieben, in gerader Lin fortginge (§. 50. 9.).

4) Man multiplicire ferner die erſtere der beyde Gleichungen (2 durch dy, die letztere durch dx, un ſubtrahire ſie dann von einander, ſo bleibt:

$$\frac{dyd^2x - dxd^2y}{dt^2} = \frac{2g\Pi(dy^2 + dx^2)}{Mds} = \frac{2g\Pi ds}{M}.$$

Hiervon iſt das Glied linker Hand $= \frac{dy}{dt}\left(\frac{dyd^2x - dxd^2y}{dy^2}\right) = \frac{dy^2}{dt^2} \cdot d\left(\frac{dx}{dy}\right)$, und wenn ma wie im §. 60. den Winkel $Mmo = \varphi$ ſetzt, $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = v \operatorname{Cos} \varphi$; $d\left(\frac{dx}{dy}\right) = d \operatorname{tang} \varphi = \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}\varphi^2}$; alſ

$$\frac{dy^2}{dt^2} \cdot d\left(\frac{dx}{dy}\right) = v^2 d\varphi = \frac{2g\Pi ds}{M},$$ mithin wird:

$$\Pi = \frac{Mv^2 d\varphi}{2gds} = \frac{Mv^2}{2gr}.$$

Der normale Seitendruck des Körpers verhält ſich dem nach wie das Quadrat ſeiner Geſchwindigkeit, und ver kehrt, wie der Krümmungshalbmeſſer des Weges a der Stelle, wo der Körper ſich befindet. Eben die folgt auch ſchon aus §. 60., da offenbar die Tange tialkraft auf den gedachten Druck weiter keinen Einflu haben kann, als nur inſofern ſie die Geſchwindigkeit de Körpers ändert.

§. 63.

Aufgabe. Es liege jetzt die Kurve AMD in einer vertikalen Ebene. Ein Körper, dessen Masse $= M$ ist, wird in A darauf gelegt, und sinkt nun vermöge seines Gewichtes längs derselben hinab; man sucht für eine gegebene Zeit t seinen Ort M, und die Geschwindigkeit, die er daselbst erlangt hat.

Auflösung 1) Man ziehe durch A die vertikale Abscissenlinie AB, fälle darauf MP senkrecht, und setze AP $= x$, PM $= y$. Ferner nenne man den Druck, den der Körper nach der Normale der Kurve rM leidet, $= \Pi$, so zerfällt dieser nach den Richtungen oM und PM in die beyden Kräfte $\Pi \frac{dy}{ds}$ und $\Pi \frac{dx}{ds}$.

2) Da der Körper außer diesen Kräften noch von seinem eigenen Gewichte M nach der Vertikale Mo getrieben wird, so erhält man gegenwärtig $P = M - \Pi \frac{dy}{ds}$ und $Q = \Pi \frac{dx}{ds}$, folglich:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2gP}{M} = 2g - \frac{2g\Pi dy}{Mds}, \text{ und}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2gQ}{M} = \frac{2g\Pi dx}{ds Mds}$$

3) Was seine Geschwindigkeit v betrift, so wird

$$vdv = 2gdx, \text{ also}$$

$$v^2 = C + 4gx,$$

wo C das Quadrat der anfänglichen Geschwindigkeit bedeutet, und also $= o$ ist, wenn der Körper seine Be-

wegung aus der Ruhe anfing. Für diesen Fall wird daher $v = 2\sqrt{gx}$.

Wenn also der Körper längs der Kurve zu einer vertikalen Tiefe x aus der Ruhe herabgesunken ist, so hat er dieselbe Geschwindigkeit erlangt, die er bekommen haben würde, wenn er zu eben der Tiefe frey herabgefallen wäre.

4) Aus $\frac{ds^2}{dt^2} = 4gx$ wird $dt = \frac{ds}{\sqrt{4gx}}$, also $t = \int \frac{ds}{\sqrt{4gx}}$; woraus sich gegenseitig bestimmen läßt, wie x oder s von der Zeit t abhängt.

§. 64.

1. Um zu finden, welchen Druck die Kurve an der Stelle M vom Körper leidet, multiplicire man die erstere der beyden Gleichungen (2) durch dy, die letztern durch dx, und subtrahire sie dann von einander, so bleibt:

$$\frac{dyd^2x}{dt^2} - \frac{dxd^2y}{dt^2} = 2gdy - \frac{2g\Pi ds}{M},$$

und wenn man für das, was auf der linken Seite steht, seinen Werth $v^2d\varphi$ substituirt (§. 62. 4.), bekommt man:

$$v^2d\varphi = 2g\left(dy - \frac{\Pi ds}{M}\right), \text{ woraus}$$

$$\Pi = M \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{Mv^2d\varphi}{2gds} = M\,Cos\,\varphi - \frac{Mv^2}{2gr} \text{ wird.}$$

2. Da φ den Neigungswinkel Mmo des Elementes Mm gegen die Horizontale mp bezeichnet, so ist M

Cos φ der Druck, den der Körper durch sein Gewicht M auf die Stelle M der Kurve ausübt (§. 44.). Der andere Theil $\frac{Mv^2}{2gr}$ des gesammten Druckes Π rührt von der Geschwindigkeit v des Körpers her (§. 62. 4.), und ist bey einer konvexen Kurve, wie AMD, deshalb subtraktiv, weil der Körper vermöge seiner Geschwindigkeit nach der Tangente fortzugehen, also von der Kurve sich zu entfernen strebt. Man könnte ihn die Fliehkraft des Körpers nennen.

3. Ist diese an irgend einer Stelle so groß, daß sie den erstern Theil M Cos φ aufhebt, so wird $\Pi = 0$; also verläßt dann der Körper die Kurve, und folgt darauf den Gesetzen der Wurfbewegung, die wir im Folgenden näher entwickeln werden. Dieser Fall ereignet sich demnach bey einer konvexen Kurve allemal, sobald irgendwo $M \text{ Cos } \varphi = \frac{Mv^2}{2gr}$, oder $v^2 = 2gr \text{ Cos } \varphi$ wird.

4. War der Körper zu Anfange seiner Bewegung in Ruhe, so ist $v^2 = 2gx$ (§. 63. 3.); also bekommt man alsdan für das Abgleiten desselben von der Kurve:

$$4gx = 2gr \text{ Cos } \varphi, \text{ oder}$$
$$x = \tfrac{1}{2} r \text{ Cos } \varphi,$$

woraus man für jede gegebene Kurve die Stelle, woselbst dies geschieht, bestimmen kann.

Exempel. Die Kurve sey ein Kreis, der in der Vertikale AB seinen Mittelpunkt hat, so ist bekanntlich der Tangentenwinkel Mmo = dem Winkel am Mittelpunkte, der dem Bogen AM zugehört; also Cos φ =

$\frac{r-x}{r}$, mithin wird $x = \frac{1}{2}(r-x) = \frac{1}{3}r$, oder auch $\cos\varphi = \frac{2}{3}$, $\varphi = 48°11'23''$, für den Bogen, den der Körper auf dem Kreise durchläuft.

5. Bey einer Kurve, die dem Körper die hohle Seite zukehrt, ist der Krümmungshalbmesser r wegen der Abnahme des Winkels φ, negativ; daher hat man in diesem Falle:

$$\Pi = M\cos\varphi + \frac{Mv^2}{2gr},$$

so daß sich also hier die Schwungkraft des Körpers mit dem Druck, der von seinem Gewichte herrührt, vereinigt.

Von der freyen Bewegung geworfener Körper.

§. 65.

Fig. 7. **Aufgabe.** Ein Körper wird von A aus mit der Geschwindigkeit c nach einer Richtung AK geworfen, die mit der Horizontale AB den Winkel KAB = I macht. Man sucht die Kurve AMD, worin er fortgeht, und seine Geschwindigkeit an jeder Stelle derselben.

Aufl. 1) Es sey M sein Ort für die Zeit t, die vom Anfange seiner Bewegung an verflossen ist, und seine Geschwindigkeit daselbst = v. Man fälle aus M auf AB das Perpendikel MP, und setze AP = x, PM = y, und den Bogen AM = s.

2) Wird nun der Widerstand der Luft hier nicht in Betracht gezogen, so wirkt in M weiter keine Kraft auf ihn, als sein eigenes Gewicht, das wir M nennen

wollen; daher hat man (§. 59. 4.) $P = o$, und $Q = -M$, folglich:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = o, \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2gQ}{M} = -2g.$$

3) Das Integral von erſterer Gleichung iſt $\frac{dx}{dt} = A$, und dieſe nochmals integrirt, giebt $x = At$, wozu keine Konſtante addirt wird, weil für $t = o$, auch $x = o$ iſt.

4) Von der andern Gleichung $\frac{d^2y}{dt^2} = -2g$ iſt das erſte Integral $\frac{dy}{dt} = B - 2gt$, und das zweyte $y = Bt - t^2$, wozu ebenfalls nichts addirt wird, weil auch y für $t = o$ verſchwindet.

5) Um die Größen A und B zu beſtimmen, ſetze man den Tangentenwinkel $mMo = \varphi$, ſo hat man $\frac{dx}{ds} = \text{Cos}\,\varphi$, $\frac{dy}{ds} = \text{Sin}\,\varphi$, alſo $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v\,\text{Cos}\,\varphi$, und $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v\,\text{Sin}\,\varphi$.

6) Nun iſt für $t = o$, oder zu Anfange der Bewegung, $v = c$, und der Winkel $\varphi = I$, weil AK die anfängliche Richtung des Körpers, folglich die Tangente der Kurve an A iſt; daher wird $A = c\,\text{Cos}\,I$, und $B = c\,\text{Sin}\,I$.

7) Dieſe Werthe für A und B in den für x und y gefundenen Ausdrücken ſubſtituirt, geben $x = ct\,\text{Cos}\,I$, und $y = ct\,\text{Sin}\,I - gt^2$.

8) Aus erſterer Gleichung erhält man $t = \frac{x}{c \operatorname{Cos} I}$ und wenn man damit aus der zweyten t wegſchafft:

$$y = x \operatorname{tang} I - \frac{gx^2}{c^2 \operatorname{Cos} I^2},$$

eine Gleichung, die die Natur der geſuchten Kurve ausdrückt.

9) Nennt man h die der Geſchwindigkeit c zugehörige Fallhöhe, ſo iſt $4gh = c^2$ (§. 39.), wodurch ſich die vorige Gleichung in folgende verwandelt:

$$y = x \operatorname{tang} I - \frac{x^2}{4h \operatorname{Cos} I^2}.$$

10) Für die Geſchwindigkeit v erhält man aus §. 59. 5.

$$vdv = -2gdy, \text{ alſo}$$
$$v^2 = C - 4gy,$$

und, da für $t = o$, oder $y = o$, $v = c$ iſt, $C = c^2$, mithin $v^2 = c^2 - 4gy = 4g(h - y)$.

§. 66.

Während der Zeit t entfernt ſich der Körper von A in der Horizontale AB um $x = ct \operatorname{Cos} I$, und erreicht zugleich eine vertikale Höhe $y = ct \operatorname{Sin} I$.

Erſtere Bewegung, das horizontale Fortrücken geſchieht alſo gleichförmig, und zwar mit eben der Geſchwindigkeit c Cos I, die dem Körper Anfangs nach dieſer Richtung ertheilt wurde; letztere Bewegung, ſein vertikales Steigen, iſt dagegen gleichförmig verzögert und verhält ſich gerade ſo, als wenn der Körper mit

den

dem vertikalen Antheile c Sin I seiner anfänglichen Geschwindigkeit bloß aufwärts gestiegen wäre. Diese Bemerkung wird zur Erläuterung des allgemeinen Satzes §. 59. 3. dienen, da im gegenwärtigen Falle nach horizontaler Richtung gar keine Kraft, und nach vertikaler Richtung bloß die Schwere auf den Körper wirkt.

§. 67.

Wenn man $y = o$ setzt, so bekommt man für die Punkte, worin die krumme Linie von der Horizontale AB geschnitten wird, die Gleichung $o = 4hx \text{ Sin I Cos I} - x^2$, deren Wurzeln $x = o$, und $x = 4h \text{ Sin I Cos I}$ sind.

Von diesen beyden Wurzeln bezieht sich die erstere auf den Anfangspunkt A, die letztere auf den zweyten Durchschnittspunkt B, und giebt also die Entfernung $BA = 4h \text{ Sin I Cos I} = 2h \text{ Sin 2I}$, in der der Körper niederfällt. Diese Entfernung nennt man die **Weite des Wurfs**.

Wird z. B. der Körper mit einer Geschwindigkeit von 75 Fuß unter einem Winkel von 15° geworfen, so ist $h = \frac{c^2}{4g_1} = \frac{5625}{62,5} = 90$ Fuß, $\text{Sin 2I} = \text{Sin } 30° = \frac{1}{2}$, folglich die gesuchte Wurfweite $AB = 90$ Fuß.

§. 68.

Da die Wurfweite sowohl für $I = o$, als für $I = 90°$ verschwindet, so folgt, daß er irgend einen Winkel zwischen 0° und 90° geben müsse, für den sie

bey einerley Schnelligkeit des Wurfs am größten ist. Nun kann der Sinus eines Winkels bekanntlich nie größer als 1 werden, also ist der größte Werth der Wurfweite $= 2h$, und diesen erhält sie für $2I = 90°$, oder für $I = 45°$.

§. 69.

Um den Punkt der Kurve zu finden, der über AB am höchsten liegt, darf man nur $\frac{dy}{dx} = o$ setzen. Dies giebt $o = 2h \operatorname{Sin} I \operatorname{Cos} I - x$, oder $x = h \operatorname{Sin} 2I = \frac{1}{2} AB$, für die Abscisse, die der größten Ordinate CD zugehört; hieraus erhält man ferner $CD = h \operatorname{Sin} I^2$.

Die größte Höhe also, zu der der Körper hinaufsteigt, ist $h \operatorname{Sin} I^2$, und er gelangt zu dieser, wenn er in die Vertikale DC kommt, die die Weite AB seiner Bahn halbirt.

§. 70.

Nimmt man CD zur Abscissenlinie an, und setzt $DI = u$, $IM = z$, so wird $x + z = AC = 2h \operatorname{Sin} I \operatorname{Cos} I$, und $y + u = CD = h \operatorname{Sin} I^2$; folglich $x = 2h \operatorname{Sin} I \operatorname{Cos} I - z$, und $y = h \operatorname{Sin} I^2 - u$. Dadurch verwandelt sich die Gleichung (65. II.) in folgende zwischen u und z

$$h \operatorname{Sin} I^2 - u = h \operatorname{Sin} I^2 - \frac{z^2}{4h \operatorname{Cos} I^2}, \text{ oder}$$

$$z^2 = 4hu \operatorname{Cos} I^2.$$

Die Bahn des Körpers ist also eine Parabel, die in D ihren Scheitel, und die Vertikale DC zum Durchmesser hat.

§. 71.

8. Bey der im §. 67. gegebenen Formel für die ite des Wurfes liegt die Vorausſetzung zum Grunde, der Körper nicht unter die Horizontale AB herabſin- könne. Wir wollen jetzt annehmen, der Punkt A e in einer gewiſſen Höhe über den Boden, und es omme der Körper von dieſem Orte aus die Geſchwin- keit c nach horizontaler Richtung AB, ſo wird die eichung §. 65. 10., wenn man darin I = o ſetzt, gende:

$$4hy = -x^2.$$

Dieſe Gleichung giebt, wie man ſieht, für y lau- negative Werthe, und gehört alſo zu einer Kurve, die ng unterhalb AB liegt. Man verwechſele ihre Koor- naten, und ſetze als Abſciſſe AQ = u, und als Ordi- te QM = z, ſo erhält man

$$z^2 = 4hu$$

ie Gleichung, wie die im §. 70. Der Körper be- reibt alſo den einen Arm einer Parabel, deren Schei- in A liegt.

§. 72.

In Beziehung auf die Zeit hat man ferner aus 65. 8., wenn daſelbſt I = o geſetzt wird, $u = gt^2$, nd $z = ct$. Hieraus folgt:

1) Daß der Körper in einer beſtimmten Zeit zu en der Tiefe unter AB gelangt, als wenn er während erſelben von A frey herabgefallen wäre; und

2) daß er ſich von der Vertikale, die durch A

Punkte A und a zwey Kreise die AN und an zu Halbmessern haben; daher durchläuft der Punkt a in eben der Zeit einen größern Raum, als der Punkt A, und bewegt sich folglich schneller als dieser.

Diese Verschiedenheit in der Umlaufsgeschwindigkeit des Körpers und der Stelle des Bodens, die unter ihm liegt, ist nun zwar gering, aber in manchen Fällen, wie wir sehen werden, doch groß genug, um beym Fallen des Körpers eine merkliche Abweichung desselben von der vertikalen Richtung hervorzubringen. Eben so bewirkt sie auch bey andern Bewegungen des Körpers eine ähnliche Abweichung von der Bahn, die er ohne Rücksicht auf die Umdrehung der Erde beschreiben würde.

§. 76.

Fig. 10. Wir wollen zuerst annehmen, es sey D ein Punkt in der Ebene des Aequators AEC, seine Höhe DA über der Oberfläche $= h$, der Halbmesser der Erde $= a$, die Umlaufszeit derselben in Sekunden $= T$.

1) So durchläuft der Punkt A in dieser Zeit den ganzen Umfang des größten Kreises, oder den Raum $= 2\pi a$; setzt man also seine Geschwindigkeit, oder den Weg, den er in einer Sekunde macht, $= f$, so ist $fT = 2\pi a$, folglich $f = \frac{2\pi a}{T}$.

2) Der Punkt D hingegen beschreibt in eben der Zeit um den Mittelpunkt C einen Kreis, der $CD = a + h$ zum Halbmesser hat, oder durchläuft darin den Raum $= 2\pi (a + h)$. Daher ist seine Geschwin-

gkeit, die wir f' nennen wollen, $= \frac{2\pi(a+h)}{T}$, folglich $f' = f(1 + \frac{a}{h})$.

3) Gesetzt nun, ein Körper fällt aus der Ruhe von D zur Oberfläche herab, so geschieht seine Bewegung in einer Kurve, DME, die in der Ebene des Aequators liegt, und also den Boden irgendwo in E treffen muß.

4) Es sey M sein Ort nach Verlauf der Zeit t. Man fälle aus diesem Punkte auf DC das Perpendikel MP, und setze CP = x, MP = y, MC = r, und den Winkel MCP = φ, so ist $x = r \cos \varphi$, und $y = r \sin \varphi$.

5) Da der Körper in M von keiner andern Kraft getrieben wird, als von seinem Gewichte = M, und dies nach den Richtungen PC und MP in die Kräfte M Cos φ und M Sin φ zerfällt, so hat man hier $P = -M \cos \varphi$, und $Q = -M \sin \varphi$, also:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2gP}{M} = -2g \cos \varphi, \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2gQ}{M} = -2g \sin \varphi.$$

6) Wegen der Kleinheit des Winkels φ *) kann

*) Sicher wird nicht leicht die Zeit des Fallens über eine Minute daurein, und doch beträgt für diese Dauer der Winkel φ nur etwas geringes über 15'. Von diesem Bogen ist für den Halbmesser = 1, die Länge = 0,00436332, und der Sinus = 0,00436331; also macht da der Unterschied zwischen beyden noch kein $\frac{1}{400000}$ von φ aus.

man füglich Sin $\varphi = \varphi$ ſetzen, wodurch $y = r\varphi$, alſo $\frac{d^2(r\varphi)}{dt^2} = -2g\varphi$ wird.

7) Nun iſt $\frac{d(r\varphi)}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} + \varphi\frac{dr}{dt}$, und $\frac{d^2(r\varphi)}{dt} = r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{dr}{dt} + \varphi\frac{d^2r}{dt^2}$; ferner iſt d^2r der Raum, durch den die Schwere den Körper während dt forttreibt, alſo $d^2r = -2gdt^2$, und folglich $\varphi\cdot\frac{d^2r}{dt^2} = -2g\varphi$. Daher erhält man (6)

$$r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{gr}{dt} - 2g\varphi = -2g\varphi; \text{ alſo}$$

$$r\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -2\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{dr}{dt}, \text{ oder}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\varphi} = -\frac{2dr}{r}.$$

8) Hiervon iſt das Integral: $\log\frac{d\varphi}{dt} = \log C - 2\log r$

$$\text{oder } \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2}.$$

9) Für $t = o$, iſt $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{f^2}{a}$, und $r = a + h$, alſo $\frac{f^2}{a} = \frac{C}{(a+h)^2}$, $C = \frac{f^2(a+h)^2}{a}$; daher wird

$$d\varphi = \frac{f^2(a+h)^2dt}{ar^2}.$$

10) Da nun der Körper in der Zeit t durch den

Raum gt^2 gefallen ist, so hat man $r = a + h - gt^2$ $= (a+h)\left(1 - \frac{gt^2}{a+h}\right)$, folglich, weil $\frac{gt^2}{a+h}$ ein sehr kleiner Bruch ist;

$$d\Phi = \frac{f\,dt}{a}\left(1 + \frac{2gt^2}{a+h}\right), \text{ und}$$

$$\Phi = \frac{ft}{a} + \frac{2gft^3}{3a^2}.$$

11) Wenn der Körper in E gelangt, so ist $r = a$, also $gt^2 = h$, $t = \sqrt{\frac{h}{g}}$. Diesen Werth für t in Φ substituirt, giebt den Winkel ACE, oder, wenn man noch mit a multiplicirt, den Bogen $AE = f\sqrt{\frac{h}{g}} + \frac{2fh^{\frac{3}{2}}}{3a\sqrt{g}}$.

12) Hiervon den Bogen $f\sqrt{\frac{h}{g}}$ subtrahirt, den in eben der Zeit $\sqrt{\frac{h}{g}}$ der Punkt A beschrieben hat (1), giebt eine Differenz $= (f' - f)\sqrt{\frac{h}{g}} + \frac{2fh^{\frac{3}{2}}}{3a\sqrt{g}} = \frac{5fh^{\frac{3}{2}}}{3a\sqrt{g}} = \frac{10\pi h^{\frac{3}{2}}}{3T\sqrt{g}}$. Um so viel hat sich also der Körper während seines Fallens von der Vertikale DA entfernt.

13) Da sich die Erde von Westen nach Osten dreht, so ist diese Abweichung östlich.

14) Die Umdrehungszeit der Erde T beträgt 86164 Sekunden mittl. Zeit, daher ist der Logarithme des Koefficienten $\frac{10\pi}{3T\sqrt{g}} = 0{,}4877929 - 5$.

Exempel. Es ſey $h = 1000$ Fuß, ſo ha
$\frac{3}{2} \log h = 4{,}5000000$, dazu
$0{,}4877927 - 5$ addirt
giebt $0{,}9877927 - 1$.
alſo die Abweichung $= 0{,}97228$ Fuß.

§. 77.

Fig. 11. Wird der Körper von A aus mit der Geſch
digkeit c vertikal aufwärts geworfen, ſo iſt ſeine an
liche Geſchwindigkeit nach der auf CA ſenkrechten
tung $= f$, alſo wird in der Formel $\frac{d\varphi}{dt} \quad \frac{C}{r^2}$ (§. 7
für $t = o$, $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{f}{a}$, und $r = a$, folglich $C = af$
$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{af}{r^2}$.

Da ferner ſeine Bewegung nach der Ver
CM durch die Schwere gleichförmig verzögert wir
iſt $r = a + ct - gt^2 = a\,(1 + \frac{ct - gt^2}{a})$;
hin wird

$$a d\varphi = f dt\,(1 - \frac{2ct}{a} + \frac{2gt^2}{a})$$

$$\text{und } a\varphi = f\,(t - \frac{ct^2}{a} + \frac{2gt^3}{3a}).$$

Nachdem er die Kurve AME durchlaufen iſt,
in E niederfällt, iſt wieder $r = a$, folglich $ct =$
oder $t = \frac{c}{g}$. Dies für t ſubſtituirt, giebt den

$AE = f\left(\frac{c}{g} - \frac{c^3}{3ag^2}\right)$, und davon den Bogen $\frac{fc}{g}$ subtrahirt, den in eben der Zeit $\frac{c}{g}$ der Punkt A beschrieben hat, bleibt $-\frac{fc^3}{3ag^2} = -\frac{2\pi c^3}{3g^2T}$.

Diese negative Differenz zeigt an, daß der Punkt A dem Körper während seiner Bewegung vorgerückt ist. Also fällt der Körper hinter der Vertikale AD, d. h. westwärts von ihr, in einer Entfernung $= \frac{2\pi c^3}{3g^2T}$ nieder.

Exempel. Es sey $c = 900$ Fuß, so hat man:

$3 \log c$	$= 8{,}8627275$
$\log 2\pi$	$= 0{,}7981799$
$\log 2\pi c^3$	$= 9{,}6609074$
Ferner $\log T$	$= 4{,}9353259$
$2 \log g$	$= 2{,}3376400$
$\log 3$	$= 0{,}4771212$
$\log 3g^2T$	$= 7{,}8000871$
von	$9{,}6609074$ subt.
bleibt	$1{,}8608203$.

Daher beträgt die Abweichung $= 72{,}58$ Fuß.

Anmerk. Die Formel §. 76. 8. gilt auch noch für den allgemeinern Fall, wenn dem Körper in der Ebene des Aequators eine Geschwindigkeit nach irgend einer schrägen Richtung ertheilt wird. Hiervon handelt Herr d'Alembert in s. Opusc. math. T. VII. pag. 314 u. f. ausführlich, legt aber dabey den Satz zum Grunde: daß der Körper nach den Gesetzen der Attraktion eine Ellipse beschreiben müsse, und findet daher

auf einem ganz andern Wege, was hier aus den ersten Sätzen der Mechanik hergeleitet ist. Dessen ungeachtet ist sein Verfahren nicht kürzer als das meinige, und hat dabey das Unvollkommene, daß es unbrauchbar wird, sobald man den Widerstand der Luft in Betracht ziehen will, weil alsdann jene Voraussetzung wegfällt.

§. 78.

Fig. 9. Liegt der Ort A nicht im Aequator, sondern unter irgend einer Breite $= \beta$, so bewegt er sich innerhalb der Zeit T um die Erdaxe CP durch den Umfang eines Parallelkreises, der zum Halbmesser die senkrechte Linie $AN = a \cos \beta$ hat; folglich ist seine Geschwindigkeit $q = \frac{2\pi a \cos \beta}{T}$, und die Geschwindigkeit q' eines Ortes a, der in der vertikalen Höhe $Aa = h$ über ihm liegt, ist $= \bar{q}\,(1 + \frac{h}{a})$.

§. 79.

Fällt demnach ein Körper von a aus der scheinbaren Ruhe auf die Erdfläche herab, so hat er zu Anfange die Geschwindigkeit q' nach einer auf die Ebene aCP senkrechten Richtung; daher kommt seine Bahn in die Fig. 12. Ebene eines größten Kreises DAG zu liegen, der auf den Meridian PA senkrecht ist, und wenn also E der Ort ist, wo er niederfällt, so weicht dieser von A nicht allein in der Länge, sondern auch außerdem noch in der Breite ab.

Man setze das Maaß des Bogens $AE = \lambda$, so hat man (§. 76. 11.) $a\lambda = q'\sqrt{\frac{h}{g}} + \frac{2qh\sqrt{h}}{3a\sqrt{g}} = q\sqrt{\frac{h}{g}} + \frac{5qh\sqrt{h}}{3a\sqrt{g}}$.

Ferner ist im rechtwinklichten sphärischen Dreyecke APE

$$1 : \text{Sin } AP = \text{tang } APE : \text{tang } AE$$

also $\text{tang } APE = \frac{\text{tang } \lambda}{\text{Cos } \beta}$, oder, da der Winkel APE sehr gering ist, $APE = \frac{\lambda}{\text{Cos } \beta}$. Dieser Winkel mißt den Bogen Ae, der vom Parallelkreise WAO zwischen den Meridianen PA und PE enthalten ist; multiplicirt man ihn also mit a Cos β, dem Halbmesser des Parallelkreises, so erhält man die absolute Länge des Bogens

$$Ae = a\lambda = q\sqrt{\frac{h}{g}} + \frac{5gh^{\frac{5}{2}}}{3a\sqrt{g}}.$$

Hiervon nun das Stück $p\sqrt{\frac{h}{g}}$ abgezogen, das der Punkt A während der Zeit $\sqrt{\frac{h}{g}}$ im Parallelkreise zurückgelegt hat, bleibt $\frac{5qh^{\frac{5}{2}}}{3a\sqrt{g}} = \frac{10\pi h^{\frac{5}{2}} \text{Cos } \beta}{3T\sqrt{g}}$ (§. 78.), für die Abweichung des Körpers von der Vertikale Aa nach der Richtung des Parallels.

§. 80.

Die andere Abweichung Ee in die Breite läßt sich folgendermaaßen bestimmen:

Im sphärischen Dreyecke APE ist Cos PE = Cos PA . Cos AE = Sin β Cos λ = Sin $\beta - \frac{1}{2}\lambda^2$ Cos β. Setzt man daher Ee = ω, so wird Cos PE = Sin $(\beta - \omega)$ = Sin $\beta - \omega$ Cos β, also

Viertes Kapitel.

Von dem Widerstande der Luft.

§. 83.

Ein Körper, der von einer flüßigen Materie, als Waſſer, Luft oder dergl. umgeben iſt, kann darin ſeinen Ort nicht verändern, ohne jedesmal die Theile derſelben, in deren Stelle er dringen will, vor ſich wegzutreiben. Soll nun dies geſchehen, ſo muß er beſtändig auf die vor ihm liegende Maſſe einen Druck ausüben, und der erzeugt allemal, wie wir in der Statik geſehen haben, von Seiten des Hinderniſſes einen eben ſo großen Gegendruck. Daher wirkt die flüßige Materie auf den Körper als eine verzögernde Kraft, und macht alſo, daß er ſich langſamer in ihr bewegt, als es unter gleichen Umſtänden im leeren Raume der Fall ſeyn würde.

§. 84.

Wir wollen nun ſetzen, ein gerades Prisma, das ſich durch die Luft nach der Richtung ſeiner Axe bewegt, leide von der vor ihm befindlichen Luftmaſſe den Druck $= \Pi$, ſo iſt klar:

1) daß dieſer Druck auf ſeine vordere Grundfläche ſenkrecht gerichtet ſey, und

2) ſich über dieſelbe gleichförmig vertheile.

Erſteres folgt nemlich: weil die Richtungen des Druckes und der Bewegung entgegen geſetzt ſeyn müſſen;

en; letzteres: weil alle Elemente der Grundfläche gleiche Geschwindigkeit, und dabey gegen die Richtung des Druckes einerley Lage haben; so daß also beym einen eben die Ursachen des Widerstandes vorhanden sind, als beym andern. Daher muß ferner:

3) der Druck II bey einerley Geschwindigkeit des Prisma's sich wie seine Grundfläche verhalten, und

4) seine mittlere Richtung durch den Schwerpunkt der Grundfläche, folglich auch zugleich durch die Axe des Prisma's gehen.

§. 85.

Wird demnach die Grundfläche des Prisma's = S, und $\Pi = NS$ gesetzt, so hat N für einerley Geschwindigkeit jedesmal einen bestimmten Werth, und ist also von dieser nur allein abhängig.

Wofern man nun annimmt: daß einerley Druck entstehe, wenn entweder die Luft mit einer bestimmten Geschwindigkeit sich senkrecht gegen eine ruhende Fläche bewegt, oder umgekehrt die Fläche mit eben der Geschwindigkeit nach einer auf sie senkrechten Richtung durch stillstehende Luft geführt wird; so läßt sich das Gesetz, nach welchem der Koefficient N von der Geschwindigkeit abhängt, wenigstens vorläufig, aus Beobachtungen über die Stärke des Luftstoßes herleiten.

Folgende Tafel enthält einige Versuche dieser Art, die von Herrn **Woltmann** vermittelst seines hydrometrischen Flügels angestellt sind *), und zwar in der er-

*) S. dessen Beschreibung des hydrometrischen Flügels. S. 50.

ſten Kolumne die Geſchwindigkeit der Luft $= v$ in Hamb. Fußen, in der zweyten der Druck auf 1 Quad. Fuß Fläche $= N$ in Lothen, und in der dritten die daraus entſpringende Verhältnißzahl $N : v^2$ angegeben:

v	N	$N : v^2$
10	4,00	0,0400
12	5,33	0,0370
20	16,11	0,0403
21	16,73	0,0379
24	20,72	0,0360
25	21,39	0,0342
26	23,15	0,0342
28	27,23	0,0347
29	29,25	0,0348
30	31,41	0,0349

Da die Differenzen zwiſchen den Werthen der dritten Kolumne nicht allein ſehr gering, ſondern auch wechſelsweiſe bald poſitiv, bald negativ ſind, ſo läßt ſich daraus ſicher auf ein unveränderliches Verhältniß zwiſchen N und v^2 ſchließen; alſo lehren uns dieſe Verſuche, was man auch ſonſt aus theoretiſchen Gründen anzunehmen pflegt, daß ſich der Widerſtand der Luft in Rückſicht der Geſchwindigkeit wie das Quadrat derſelben verhalte.

Nimmt man nun zwiſchen den zehn verſchiedenen Werthen von $\frac{N}{v^2}$ das arithmetiſche Mittel, ſo wird:

$N = 0{,}0364 \cdot v^2$, folglich $\Pi = 0{,}034 \cdot v^2 S$. Loth.

Die Einheit, die hier zum Grunde liegt, ist 1 Hamb. Fuß = 0,913 Rheinl. Fuß; will man also die Formel so einrichten, daß sich darin sowohl v als S auf Rheinl. Maaß beziehen, so muß man ihren Koefficienten noch durch das Biquadrat der Verhältnißzahl 0,913 dividiren, wodurch endlich:

$\Pi = 0{,}0524\, v^2 S$. Loth wird.

Exempel. Ein Cylinder, dessen Grundfläche 6 Rheinl. Füß im Durchmesser hat, bewegt sich nach der Richtung seiner Axe durch die Luft mit der Geschwindigkeit von 19 Fuß in 1 Sekunde; wie groß ist der Widerstand, der ihm die Luft entgegensetzt?

Hier ist $S = 9\pi$, also

$\log S = 1{,}4513924$

$\log v^2 = 2{,}5575072$

$\log \frac{524}{10000} = 0{,}7193313 - 2$

$\log \Pi = 2{,}7282309$

folglich $\Pi = 534{,}8386$ Loth $= 16{,}7137$ ℔.

§. 86.

Aufgabe. Den Widerstand zu bestimmen, den eine Kugel vom Halbmesser = a in der Luft leidet, wenn sie sich durch dieselbe mit einer gegebenen Geschwindigkeit v bewegt.

Fig. 13. 1) Man nehme die Richtung der Bewegung CA zur Axe der Kugel an, lege durch sie einen größten Kreis ADBE, und setze darin CP = u, PM = z, und den Winkel MCA = φ, so hat man $u = a \operatorname{Cos} \varphi$, und $z = a \operatorname{Sin} \varphi$.

2) Auf das Element Mm dieſes Kreiſes wirkt offenbar nur eine Luftſchicht von der Breite mr = dz = a Cos φdΦ; es leidet alſo den Druck p = 0,0524 v²a Cos φdφ, den wir der Kürze wegen = λv²a Cos φdφ ſetzen wollen.

3) Da aber dieſer Druck auf das Element unter der ſchiefen Richtung Mr geſchieht, ſo iſt nur der Theil von ihm = p Cos φ wirkſam, der nach der Normale MC gerichtet iſt.

4) Dieſer zerfällt noch im Mittelpunkte der Kugel nach den Richtungen CB und CE in die beyden Kräfte p Cos φ² und p Cos φ Sin φ, wovon die letztere durch einen eben ſo großen Gegendruck, der von der andern Seite her entſteht, aufgehoben wird.

5) Nun iſt ferner die Fläche der Kugelzone, die zwiſchen den beyden durch MP und mp gehenden Parallelkreiſen liegt, = 2π . MP . Mm, alſo der unmittelbare Druck darauf = 2πzp, und folglich der daraus entſpringende Widerſtand nach CB = 2πz . p Cos φ² = $2\pi\lambda v^2a^2$ Cos φ³ Sin φdφ (1. 2.) = $-\frac{2\pi\lambda v^2u^3du}{a^2}$.

6) Hiervon das Integral genommen, giebt den Widerſtand für die Fläche des Kugelſegmentes, das von dem Schnitte durch MP begrenzt wird, = $2\pi\lambda v^2(C - \frac{u^2}{4a^2})$, und da derſelbe für φ = o, oder u = a verſchwindet, ſo iſt C = $\frac{1}{4}a^2$.

7) Setzt man nun u = o, ſo erhält man endlich

gesammten Widerstand, den die Kugel leidet, = $\lambda v^2 C = \frac{1}{2}\pi\lambda v^2 a^2$.

§. 87.

Die Fläche eines größten Kreises der Kugel ist = $\frac{1}{4}\pi a^2$; also der Widerstand, den sie leidet, wenn sie sich mit der Geschwindigkeit v nach einer auf sie senkrechten Richtung durch die Luft bewegt, = $\frac{1}{8}\pi\lambda v^2 a^2$. Daraus ergiebt demnach:

Daß eine Kugel halb so viel Widerstand finde, als ihr größter Kreis, der sich mit eben der Geschwindigkeit senkrecht auf seine Richtung fortbewegt.

Exempel. Eine Kugel also, die 6 Fuß im Durchmesser, und 19 Fuß Geschwindigkeit hat, leidet 3565 ℔ Widerstand (§. 85.).

§. 88.

Aufgabe. Ein Körper von gegebener Form und Masse fällt aus der Ruhe durch die Luft vertikal herab; man fragt, wie groß nach Verlauf der Zeit t seine Geschwindigkeit v, und der zurückgelegte Fallraum x sey.

Aufl. 1) Der Widerstand, den ihm die Luft entgegensetzt, ist, wie wir gesehen haben, sowohl von seiner äußern Form, als auch von seiner Geschwindigkeit abhängig; so z. B. war er für ein Prisma, das sich senkrecht auf seine Vorderfläche S mit der Geschwindigkeit v bewegt, = $\lambda S v^2$, und für eine Kugel, deren Durchmesser = a ist, = $\frac{1}{8}\lambda\pi a^2 v^2$; wir wollen ihn daher allgemein = Lv^2 setzen.

2) Außerdem verliert der Körper in der Luft noch

ſo viel von ſeinem abſoluten Gewichte, als die Luftmaſſe wiegt, die mit ihm gleiches Volumen hat. Nennt man alſo ſeine Maſſe, oder ſein abſolutes Gewicht $= M$, ſein Volumen $= V$, ſeine Dichte $= n$, die Dichte der Luft $= i$, ſo iſt $M = nV$, und der Verluſt, den er leidet $= iV$, folglich behält er noch das Gewicht $(n-i)V = (1 - \frac{i}{n})M$.

3) Es wirken alſo in jedem Augenblicke zwey Kräfte auf den Körper: ſein relatives Gewicht $(1 - \frac{i}{n})M$, womit er vertikal herabzuſinken ſtrebt, und nach entgegengeſetzter Richtung der Widerſtand Lv^2; daher hat man hier (§. 50,) $P = (1 - \frac{i}{n})M - Lv^2$, und

$$dv = \frac{2gPdt}{M} = 2gdt\,(1 - \frac{i}{n} - \frac{Lv^2}{M}).$$

4) Man ſetze zur Abkürzung $2g(1 - \frac{i}{n}) = f$, und $\frac{2gL}{M} = \frac{f}{\varkappa^2}$, ſo wird

$$dv = fdt\,(1 - \frac{v^2}{\varkappa^2})$$

$$\text{alſo } \frac{2fdt}{\varkappa} = \frac{2\varkappa dv}{\varkappa^2 - v^2} = \frac{dv}{\varkappa + v} + \frac{dv}{\varkappa - v}$$

$$\text{und } \frac{2ft}{\varkappa} = \log(\varkappa + v) - \log(\varkappa - v) = \log(\frac{\varkappa + v}{\varkappa - v})$$

5) Wird nun noch $\frac{f}{\varkappa} = \omega$ geſetzt, ſo erhält man gegenſeitig:

$$\frac{\kappa + v}{\kappa - v} = e^{2\omega t}, \text{ woraus}$$

$$v = \kappa \cdot \frac{e^{2\omega t} - 1}{e^{2\omega t} + 1} \text{ wird.}$$

6) Multiplicirt man ferner die Gleichung $dv = fdt\left(1 - \frac{v^2}{\kappa^2}\right)$ durch $\kappa^2 v$, und setzt dann für vdt seinen Werth dx, so giebt dies

$$\kappa^2 v dv = fdx(\kappa^2 - v^2)$$

$$\text{also wird } 2fdx = \frac{2\kappa^2 v dv}{\kappa^2 - v^2}$$

folglich wenn man integrirt:

$$2fx = C - \kappa^2 \log(\kappa^2 - v^2)$$

und da für $v = o$, auch $x = o$ ist, so hat man $C = \kappa^2 \log \kappa^2$, mithin $2fx = \kappa^2 \log\left(\frac{\kappa^2}{\kappa^2 - v^2}\right)$.

7) Darin nun für v seinen Werth aus (5) substituirt, giebt endlich:

$$2fx = \kappa^2 \log\left(\frac{(1 + e^{2\omega t})^2}{4e^{2\omega t}}\right)$$

$$\text{oder } x = \frac{M}{2gL} \cdot \log\left(\frac{1 + e^{2\omega t}}{2e^{\omega t}}\right).$$

§. 89.

Wenn man in dem für die Geschwindigkeit v gefundenen Ausdrucke Zähler und Nenner noch durch $e^{2\omega t}$ dividirt, so erhält man:

$$v = \kappa \cdot \frac{1 - e^{-2\omega t}}{2 + e^{-2\omega t}}$$

Läßt man nun hierin t unendlich wachsen, so nimmt $e^{-2\omega t}$ unendlich ab, folglich nähert sich v unendlich der Grenze u. Das Fallen der Körper in der Luft ist also zwar eine beschleunigte Bewegung, aber doch von der Art, daß sie sich immer mehr und mehr einem gleichförmigen Beharrungszustande nähert, bey dem die Geschwindigkeit $= u = \sqrt{\frac{(n-i)\,M}{nL}}$ ist. Leidet der Körper von der Luft einen beträchtlichen Widerstand, so sieht man leicht, daß seine Geschwindigkeit jener Grenze sehr bald nahe kommen, und dann während der übrigen Zeit seines Fallens nur noch geringen Aenderungen unterworfen seyn müsse.

§. 90.

Um doch wenigstens für eine kurze Dauer der Bewegung bey Körpern, die nach Verhältniß ihres Gewichtes nur geringen Widerstand finden, eine Vergleichung zwischen ihrer Fallhöhe in der Luft, und der im leeren Raume anzustellen, bringe man den für x gefundenen Ausdruck unter folgende Form:

$$x = \frac{M}{2gL} \log\left(\frac{e^{-\omega t} + e^{\omega t}}{2}\right)$$

Nun ist $e^{-\omega t} = 1 - \omega t + \frac{1}{2}\omega^2 t^2 - \frac{1}{2.3}\omega^3 t^3 + \text{u. s. w.}$

$$e^{\omega t} = 1 + \omega t + \tfrac{1}{2}\omega^2 t^2 + \frac{1}{2.3}\omega^3 t^3 + \ldots$$

also wird: $\frac{e^{-\omega t} + e^{\omega t}}{2} = 1 + \frac{1}{2}\omega^2 t^2 + \frac{1}{2.3.4}\omega^4 t^4 + \ldots$

Dieſe Reihe $= 1 + z$ geſetzt, und davon den hyperboliſchen Logarithmen genommen, giebt:

$$x = \frac{M}{2gL}\left(z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \ldots\right)$$

und wenn man den Werth für z wieder herſtellt:

$$x = \frac{M}{2gL}\left(\tfrac{1}{2}\omega^2t^2 - \tfrac{1}{12}\omega^4t^4 + \tfrac{1}{45}\omega^6t^6 \ldots\right)$$

Die Dichte der Luft kommt ſelten gegen die Dichte des Körpers in Betracht; man kann alſo hier um ſo eher i gegen n weglaſſen, wodurch $\omega = \frac{f}{n} = 2g\sqrt{\frac{L}{M}}$ wird. Daher bekommt man endlich:

$$x = gt^2 - \frac{2g^3t^4 \cdot L}{3M} + \frac{32g^5t^6L^2}{45M^2} - \ldots$$

§. 91.

Für eine Kugel iſt nun z. B. $L = \frac{1}{2}\lambda\pi a^2 = 0{,}0262\pi a^2$ Loth, und wenn man ihre Dichte n auf die des Waſſers bezieht, wovon der Kubikfuß nach gewöhnlicher Annahme 70 ℔ wiegt, ſo iſt das Gewicht eines Kubikfußes ihrer Materie $= 70 \cdot n$ ℔ $= 2240 \cdot n$ Loth; dies mit ihrem Volumen $\frac{4}{3}\pi a^3$ multiplicirt, giebt ihre Maſſe $M = 8960 \cdot \frac{1}{3}\pi a^3$, folglich $\frac{2Lg^3}{3M} = 0{,}000005848 \cdot \frac{g^3}{na} = 0{,}0223 \cdot \frac{1}{na}$; wodurch

$$x = 15{,}625\,t^2 - 0{,}0223 \cdot \frac{t^4}{na} \text{ wird.}$$

Exempel. Die Kugel beſtehe aus Eiſen, und

habe $\frac{1}{2}$ Fuß im Durchmeſſer, ſo iſt $a = \frac{1}{4}$, $n = 7,8$; man erhält alſo

$$x = 15,625\, t^2 - 0,0114\, t^4.$$

Hiernach betrüge z. B. ihr Fallraum in der erſten Sekunde 15,613 Fuß.

§. 92.

Iſt dagegen die Zeit des Fallens, und der Widerſtand in Vergleichung gegen die Maſſe des Körpers groß genug, daß man 1 gegen $e^{2\omega t}$ weglaſſen kann, ſo verwandelt ſich die Formel für x (§. 88.) in folgende:

$$x = \frac{M}{2gL}(\omega t - \log 2)$$

Man nehme noch zur Abkürzung das Gewicht, das dem Körper in der Luft übrig bleibt, als eine Größe, die unmittelbar gegeben iſt, $= G$, ſo wird $\frac{G}{M} = 1 - \frac{i}{n}$ (§. 88. 2.), alſo $f = \frac{2gG}{M}$, $\kappa = \sqrt{\frac{Mf}{2gL}} = \sqrt{\frac{G}{L}}$, und folglich $\omega = \frac{f}{\kappa} = \frac{2g}{M}\sqrt{GL}$.

Dies für ω in voriger Formel ſubſtituirt, giebt:

$$x = t\sqrt{\frac{G}{L}} - \frac{M \log 2}{2gL}.$$

§. 93.

Es ſey nun der Halbmeſſer einer Kugel $= a$, das abſolute Gewicht eines Kubikfußes ihrer Materie $= D$

so hat man $L = \frac{1}{2}\lambda\pi a^2$, $M = \frac{4}{3}\pi a^3 D$, folglich $\frac{G}{L} = \frac{2G}{\lambda\pi a^2}$, $\frac{M}{2gL} = \frac{4aD}{3g\lambda}$, und daher:

$$x = t\sqrt{\frac{2G}{\lambda\pi a^2} - \frac{4aD\log 2}{3g\lambda}}.$$

Gesetzt also, man hätte von einer Kugel, die aus einer sehr leichten Materie bestände, die Zeit t beobachtet, in der sie von einer gegebenen Höhe x herabfällt, so ließe sich daraus gegenseitig der Koefficient λ auf eine leichte Art herleiten. Nennt man nemlich $\frac{t^2G}{\pi a x^2} = A$, und $\frac{4aD\log 2}{3gx} = B$, so erhält man die Gleichung:

$$\lambda + B = \sqrt{2A\lambda}, \text{ oder}$$
$$\lambda^2 - 2\lambda(A - B) + B^2 = 0, \text{ woraus}$$
$$\lambda = A - B + A\sqrt{(1 - \frac{2B}{A})} \text{ wird.}$$

§. 94.

Um den Gebrauch dieser sehr einfachen und bequemen Formel zu erläutern, und zugleich auch, eine nähere und richtigere Bestimmung des Werthes λ zu erhalten, weil ich davon auf die von Hawksbee in s. Exp. physico-mechan. Tom. I. pag. 27. angeführten Versuche mit hohlen Glaskugeln, die er vom Thurme der St. Paulskirkirche, eine Höhe von 220 engl. Fuß, herabfallen ließ, eine Anwendung machen; wobey ich noch erinnern muß, daß wegen der unvermeidlichen Fehler

der Beobachtung die Zeiten des Falles in nachstehe Tafel durchgängig um 0,3″ geringer angenommen als der Verf. sie angiebt.

Gewicht Gran.	Diam. engl. Zoll.	Zeit Sekunden.
510	5,1	8,2
642	5,2	7,7
599	5,1	7,7
515	5,0	7,9$\frac{1}{2}$
483	5,0	8,2

Was den ersten dieser Versuche betrift, so wird zu derst nach angestellter Reduktion des engl. Maaßes rheinl. und des Gewichtes auf ℔, wozu folgende S gleichungen dienen:

1 ℔ = 7680 Gr., und 1 engl. Fuß = 0,97 Rheinl. Fuß.

1) x = 213,72, a = 0,206435, G = 0,0664 t = 8,2, also V = $\frac{4}{3}\pi a^3$ = 0,03685, und dies dem Gewichte eines Kubikfußes Luft = $\frac{7}{8\,5}$ ℔ mu plicirt, giebt den Verlust, den die Kugel in der Luft Gewichte leidet = 0,0030347; daher wird ihr abs tes Gewicht M = 0,0694407, und D = $\frac{M}{V}$ 1,88441.

2) Um sich vorher erst zu überzeugen, daß r hier mit vollem Rechte 1 gegen $e^{2\sigma t}$ weglassen kö gebrauche man vorläufig den zuvor für λ angenom nen Werth (§. 85.), der hier = 0,001638 ist, t

sich auf die Einheit ℔ bezieht, so erhält man $\omega t = \frac{gt}{M}\sqrt{\frac{1}{2}\lambda\pi a^2 G} = 9{,}956$, also $e^{2\omega t} = e^{19{,}912}$, eine Zahl, die aus 9 Ziffern besteht, und wogegen folglich 1 auf keine Weise in Betracht kommt.

4) Dies vorausgesetzt, wird nun die Rechnung folgende:

log t^2	= 1,8276278
log G	= 0,8222086 — 2
log t^2G	= 0,6498364
Ferner log x^2	= 4,6596904
log a^2	= 0,6295668 — 2
log π	= 0,4971499
log πa^2x^2	= 3,7864071
log A	= 0,8634293 — 4
A	= 0,00073018

5) Da in der Formel für B, log 2 den natürlichen Logarithmen bezeichnet, also = 0,6931472 ist, so hat man

log . 12	= 0,8408254 — 1
log 4aD	= 0,1920188
log 4aD12	= 0,0328442
davon log 3gx	= 4,0007864 subtr.
bleibt: log B	= 0,0320578 — 4
B	= 0,00010766.

6) Hieraus erhält man $1 - \frac{2B}{A} = 0{,}70511$, und

$$A\sqrt{(1-\frac{2B}{A})} = 0{,}00061314, \text{ folglich}$$

$$\lambda = A - B + A\sqrt{(1-\frac{2B}{A})} = 0{,}0012357$$

7) Eben so giebt der zweyte Versuch

$\lambda = 0{,}0012873$

der dritte: . . . 0,0012878

der vierte . . . 0,0012059

und der fünfte . . . 0,0012174

Nimmt man zwischen diesen fünf Werthen das Mittel, so bekommt man

$\lambda = 0{,}001468.$

8) demnach ist der Widerstand, den eine ebene Fläche von S Quad. Fußen leidet, die sich durch die Luft mit der Geschwindigkeit v senkrecht auf ihre Richtung bewegt, $= 0{,}0012468 \cdot v^2 S$. ℔.

9) und den eine Kugel leidet, deren Halbmesser = a Fuß, und Geschwindigkeit $= v$ ist, $= 0{,}0006234\ \pi a^2 v^2 = 0{,}00185847 \cdot a^2 \cdot v^2$.

§. 95.

Zum Beweise, daß der für λ gefundene Werth der Wahrheit sehr nahe kommen müsse, will ich noch von den Versuchen ähnlicher Art, die **Desaguillers** mit Kugeln von leichten Materien angestellt hat, folgenden als Exempel beyfügen:

Bey einer mit Luft angefüllten Blase, die 5,3 engl. Zoll im Durchmesser, und 128 Gr. am Gewichte hatte, verflossen $19\frac{3}{8}$″, ehe sie aus einer Höhe von 272

. Fuß, die nach unſerm Maaße 264 Fuß betragen, Boden herabkam.

Unſtreitig findet hier die Formel (§. 93.)

$$x = t\sqrt{\frac{2G}{\lambda\pi a^2}} - \frac{4aD\log 2}{3g\lambda}$$

: vollkommene Anwendung. Reducirt man nun die ta auf ihr gehöriges Maaß, ſo wird darinn $a = \frac{1}{4}$ 145, $G = \frac{1}{80}$ ℔; alſo das erſte Glied $t\sqrt{\frac{2G}{\lambda\pi a^2}}$ 263,46 Fuß.

Ferner $V = 0{,}041357$; daher der Verluſt der aſe an ihrem abſoluten Gewichte $= 0{,}0034058$, cher zu G addirt, $M = 0{,}0200725$ ℔ giebt. Da- ch bekommt man $\log D = 0{,}6860488 - 1$, und aus das zweyte Glied $\frac{4aD\log 2}{3g\lambda} = 4{,}94$; folglich $= 258{,}52$ Fuß.

Nun war nach der Angabe . . $x = 264$

alſo beträgt die Abweichung $5\frac{1}{2}$ Fuß.

Eine genauere Uebereinſtimmung, als dieſe, darf n wohl gerade nicht erwarten, wenn man nur erwägt, ; die beobachtete Zeit leicht um $\frac{1}{2}$" unrichtig ſeyn m. Für $t = 20$" erhielte man aus der Formel $= 267$, folglich ſchon mehr, als der vorgeſchriebene llraum ausmacht.

§. 96.

Aufgabe. Ein Körper wird mit der Geſchwin- ſkeit c in der Luft vertikal aufwärts geworfen; man

ſucht für eine gegebene Zeit t ſeine Geſchwindigkeit v und die Höhe, zu der er geſtiegen iſt.

Aufl. 1) Da hier beyde Kräfte (§. 88. 3.), ſowohl das relative Gewicht des Körpers G, als auch der Widerſtand der Luft Lv^2, ſeiner Bewegung entgegenwirken, ſo bekommt man:

$$Mdv = -2gdt(G+Lv^2),$$

oder, wenn wieder $\frac{2gG}{M} = f$, und $\frac{2gL}{M} = \frac{f}{\kappa^2}$ geſetzt wird:

$$dv = -fdt\left(1+\frac{v^2}{\kappa^2}\right)$$

$$\text{alſo: } fdt = \frac{-dv}{1+\frac{v^2}{\kappa^2}}$$

2) Man nenne $\frac{v}{\kappa} = u$, ſo wird $dv = \kappa du$, folglich:

$$\frac{fdt}{\kappa} = \frac{-du}{1+u^2}, \text{ mithin}$$

$$\frac{ft}{\kappa} = C - \text{arc tang } u.$$

3) Für $t = o$ iſt nun $v = c$, alſo $C = \text{arc tang } \frac{v}{\kappa}$; daher

$$\frac{ft}{\kappa} = \text{arc tang } \frac{c}{\kappa} - \text{arc tang } \frac{v}{\kappa}.$$

4) Die Differenz zweyer Bogen, deren Tangenten p und q ſind, gehört bekanntlich zur Tangente $\frac{p-q}{1+pq}$;

t man alſo $p = \frac{c}{x}$, und $q = \frac{v}{x}$, ſo verwandelt ſich vorige Gleichung in folgende:

$$\frac{ft}{x} = \text{arc tang} \frac{(c-v)x}{x^2+cv}, \text{ woraus gegenſeitig}$$

$$\frac{(c-v)x}{x^2+cv} = \text{tang} \frac{ft}{x}, \text{ und wenn man tang}$$

$= z$ ſetzt:

$$v = x \cdot \left(\frac{c-xz}{x+cz}\right) \text{ wird.}$$

5) Multiplicirt man ferner die Gleichung (1) h durch v, und ſubſtituirt dann für vdt ſeinen Werth , ſo erhält man:

$$vdv = -\frac{fdx}{x^2}(x^2+v^2), \text{ alſo}$$

$$\frac{2fdx}{x^2} = \frac{-2vdv}{x^2+v^2}, \text{ und}$$

$$\frac{2fx}{x^2} = C - \log(x^2+v^2)$$

6) Weil für $x = o$, $v = c$ iſt, ſo wird in dieſer eichung $C = \log(x^2+c^2)$, folglich:

$$x = \frac{x^2}{2f} \cdot \log\left(\frac{x^2+c^2}{x^2+v^2}\right).$$

7) Hierin für v ſeinen Werth aus (4) geſetzt, ebt endlich:

$$x = \frac{x^2}{2f} \log \frac{(x+cz)^2}{x^2(1+z^2)},$$

oder, da $1 + z^2 = \text{Scc}^2 \frac{ft}{x}$ ist:

$$x = \frac{x^2}{f} \cdot \log \left[\left(1 + \frac{c}{x} \tan \frac{ft}{x}\right) \cos \frac{ft}{x} \right].$$

§. 97.

Um zu finden, wieviel Zeit verfließt, bis der Körper seine größte Höhe erreicht, setze man in (4) $v = 0$, so bekommt man die ganze Dauer des Steigens $T = \frac{x}{f} \cdot \text{arc tang} \frac{c}{x}$, oder, da $f = \frac{2gG}{M}$, und $x = \sqrt{\frac{G}{A}}$ ist:

$$T = \frac{M}{2g\sqrt{GL}} \cdot \text{arc tang } c\sqrt{\frac{L}{G}}.$$

Bey Körpern von beträchtlichem specifischen Gewichte kann man, ohne daß es der nöthigen Schärfe nachtheilig werden könnte, $G = M$ setzen, wodurch $T = \frac{\sqrt{M}}{2g\sqrt{L}} \cdot \text{arc tang } c\sqrt{\frac{A}{M}}$ wird.

Löst man nun diesen Ausdruck nach der bekannten Formel

$$\text{arc tang } u = u - \tfrac{1}{3}u^3 + \tfrac{1}{5}u^5 - u.\,s.\,f.$$

in eine Reihe auf, so erhält man endlich:

$$T = \frac{c}{2g}\left[1 - \frac{c^2 L}{3M} + \frac{c^4 L^2}{5M^2} - \ldots\right]$$

Exempel. Eine eiserne Kugel von 6 Zoll Durchmesser werde mit einer Geschwindigkeit von 100 Fuß in die Höhe geworfen; man fragt, wie lange sie steigen werde?

Hier ist $L = 0{,}0006234\ \pi a^2$, $M = \frac{4}{3}\pi a^3 D$,

$= 546\,\text{℔}$, $a = \frac{1}{4}$; alſo $\frac{c^2 L}{M} = 0{,}03425$, $\frac{c^4 L^2}{M^2} =$ 0117, und $T = \frac{c}{2g} \times 0{,}98881 = 3{,}164''$.

Im luftleeren Raume wäre $T = 3{,}2''$; daher bekt der Widerſtand der Luft in der ganzen Zeit des eigens einen Unterſchied von $0{,}036''$.

§. 98.

Man ſetze auch in der für x (§. 96. 6.) gefundei Formel $v = 0$, ſo erhält man für die größte Höhe, der der Körper hinaufſteigt

$$x = \frac{c^2}{2f} \log\left(1 + \frac{c^2}{x^2}\right).$$

ieſen Ausdruck in eine Reihe verwandelt, und wieder $= 2g$, $c = \sqrt{\frac{M}{L}}$ geſetzt, giebt:

$$x = \frac{c^2}{4g}\left[1 - \frac{c^2 L}{2M} + \frac{c^4 L^2}{3M^2} - \frac{c^5 L^3}{4M^3} + \ldots\right]$$

o würde im vorigen Exempel $x = 0{,}98324 \cdot \frac{c^2}{4g} =$ 7, 2 Fuß, ſtatt daß im leeren Raume $x = \frac{c^2}{4g} = 160$ ß betrüge.

ergleichung zwiſchen dem Steigen und nachherigen Fallen der Körper in der Luft.

§. 99.

Im leeren Raume iſt das Steigen und Fallen der

Körper eine zusammenhängende Bewegung, bey der die Geschwindigkeit nach einerley Gesetze erst bis zu o abnimmt, und dann ins Negative übergeht. In der Luft hingegen hört diese Verbindung auf; da ist nemlich, so lange der Körper steigt, die auf ihn wirkende Kraft $= G + Lv^2$, so bald aber seine Geschwindigkeit $= o$ geworden ist, verwandelt sich die Kraft plötzlich in $G - Lv^2$, die offenbar nicht mehr so vom negativen v abhängt, als erstere vom positiven abhing. Also folgen beyde Bewegungen, das Steigen und das Fallen, in der Luft ganz verschiedenen Gesetzen, und müssen daher abgesondert von einander betrachtet werden.

§. 100.

1) Es sey nun, wie vorhin, die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers in $A = c$; seine Geschwindigkeit in P, wenn er um den Raum $AP = x$ gestiegen ist, $= v$, und seine größte Höhe, die er erreicht $= h$, so ist

$$x = \frac{x^2}{2f} \log\left(\frac{x^2 + c^2}{x^2 + v^2}\right) \text{ (§. 96. 6.)}$$

$$\text{und } h = \frac{x^2}{2f} \log\left(1 + \frac{c^2}{x^2}\right)$$

$$\text{also } BP = h - x = \frac{x^2}{2f} \log\left(1 + \frac{v^2}{x^2}\right).$$

2) Ferner sey seine Geschwindigkeit an eben der Stelle P beym Herabfallen $= v'$, so erhält man aus der Formel §. 97. 6., wenn man darin $h - x$ statt x, und v' statt v setzt:

$$h - x = \frac{x^2}{2f} \log\left(\frac{x^2}{x^2 - v'^2}\right)$$

3) Beyde Werthe von $h - x$ gleich geſetzt, ge- alſo:

$$1 + \frac{v^2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2 - v'^2}$$

$$\text{oder } \left(1 + \frac{v^2}{x^2}\right)\left(1 - \frac{v'^2}{x^2}\right) = 1$$

$$\text{daher wird } v^2 - v'^2 - \frac{v^2 v'^2}{x^2} = 0.$$

4) Aus dieſer Gleichung bekommt man:

$$v'^2 = v^2 : \left(1 + \frac{v^2}{x^2}\right)$$

$$\text{und } v' = v : \sqrt{\left(1 + \frac{v^2}{x^2}\right)}$$

Man ſieht alſo offenbar, daß an einerley Stelle Vertikale AB die Geſchwindigkeit des Körpers beym abfallen jedesmal geringer iſt, als beym Hinauf- igen, und daß der Unterſchied zwiſchen beyden Ge- windigkeiten deſto mehr beträgt, je größern Wi- ſtand der Körper in Verhältniß gegen ſeine Maſſe det.

5) Nennt man die Geſchwindigkeit, womit der rper in A zurückkehrt $= c'$, ſo wird

$$c' = c : \sqrt{\left(1 + \frac{c^2}{x^2}\right)} = c : \sqrt{\left(1 + \frac{c\,L}{G}\right)}$$

In dem §. 97. angenommenen Falle wäre z. B. $= c : \sqrt{(1{,}03425)} = 0{,}9833 \cdot c = 98{,}33$ Fuß.

§. 101.

Die Zeit des Steigens durch AB heiße = T, durch den Theil PB = t', und die des Fallens durch eben den Raum BP = t'', so ist zuvörderst $T = \frac{\varkappa}{f} \cdot \text{arc tang} \frac{c}{\varkappa}$ (§. 97.), und daher: $t = T - \frac{\varkappa}{f} \cdot \text{arc tang} \frac{v}{\varkappa}$ (§. 96. 3.); folglich, da $t' = T - t$ ist, $t' = \frac{\varkappa}{f} \cdot \text{arc tang} \frac{v}{\varkappa}$.

Man setze nun $v = \varkappa \operatorname{Cot} 2\xi$, so hat man $\frac{v}{\varkappa} = \text{tang}\,(\frac{1}{2}\pi - 2\xi)$, also $t' = \frac{\varkappa}{f}(\frac{1}{2}\pi - 2\xi)$.

Ferner wird $\sqrt{(1 + \frac{v^2}{\varkappa^2})} = \sqrt{(1 + \operatorname{Cot} 2\xi^2)}$ $= \text{Cosec} \cdot 2\xi$, folglich $v' = \varkappa \operatorname{Cot} 2\xi \cdot \operatorname{Sin} 2\xi$ $= \varkappa \operatorname{Cos} 2\xi$. Dies für v' in die Formel §. 88. 4. substituirt, giebt:

$$t'' = \frac{\varkappa}{2f} \log\left(\frac{1 + \operatorname{Cos} 2\xi}{1 - \operatorname{Cos} 2\xi}\right) = \frac{\varkappa}{2f} \log\left(\frac{2 \operatorname{Cos} \xi^2}{2 \operatorname{Sin} \xi^2}\right)$$

$$= \frac{\varkappa}{f} \log \operatorname{Cot} \xi.$$

Für $v = c$, sey $\xi = \gamma$, so wird die Zeit des Steigens durch $AB = \frac{\varkappa}{f}(\frac{1}{2}\pi - 2\gamma)$, und die des Fallens durch $AB = \frac{\varkappa}{f} \log \operatorname{Cot} \gamma$.

Aus beyden zusammen genommen entspringt also die ganze Zeit, die vom Aufsteigen des Körpers aus A

bis zu seiner Rückkehr nach A verfließt, $= \frac{\pi}{f}(\frac{1}{2}\pi - 2\gamma + \log \text{Cot}\,\gamma)$.

Diese Formel giebt **Lambert** in den Mem. de l'acad. de Berlin 1765.

Exempel. In §. 97. erhält man $\frac{c}{\pi} = \text{Cot}\,2\gamma = 0{,}18507$, also $90° - 2\gamma = 10°29'$, und diesen Winkel in einen Bogen verwandelt, giebt: $\frac{1}{2}\pi - 2\gamma = 0{,}1829687$. Ferner wird:

log nat. Cot $\gamma = 0{,}1839982$, und $\frac{\pi}{f} = 17{,}29497$, folglich die ganze Zeit des Steigens und Fallens $= 0{,}366967 \cdot \frac{\pi}{f} = 6{,}3466''$.

Ueber die Bahn geworfener Körper in der Luft.

§. 102.

Es bleibt jetzt noch zu bestimmen übrig, welchen Einfluß der Widerstand der Luft auf die Bewegung des Körpers hat, wenn ihm Anfangs die Geschwindigkeit c nach irgend einer schrägen Richtung Ax ertheilt wird, die mit der Horizontale einen gegebenen Winkel I macht.

Fig. 7. Man setze, wie im §. 65., der Körper habe während der Zeit t von seiner Bahn den Bogen AM $= s$ zurückgelegt, und sey nun gegenwärtig im Punkte M der Vertikale MP $= y$, die von der durch A gehenden Vertikale um AP $= x$ entfernt liegt. Ferner sey

seine Geschwindigkeit an diesem Orte $= v$, und der Winkel mMI, den seine jetzige Richtung, oder das Element Mm, das er jetzt zu durchlaufen im Begriff ist, mit der Horizontale MI macht, $= \varphi$.

1) So wirken auf ihn in diesem Augenblicke zwey Kräfte, sein relatives Gewicht G nach der Vertikale MP, und der Widerstand der Luft $= Lv^2$, nach einer Richtung, die der seinigen entgegengesetzt ist, und also ebenfalls von der Horizontale um den Winkel φ abweicht.

2) Um diese Kräfte auf zwey andere zurück zu führen, deren Richtungen mit AP und PM parallel sind (§. 58.), zerlege man die Kraft Lv^2 in eine nach $IM = Lv^2 \operatorname{Cos} \varphi$, und in eine nach $MP = Lv^2 \operatorname{Sin} \varphi$; alsdann giebt letztere in Verbindung mit G die vertikale Kraft $Q = -G - Lv^2 \operatorname{Sin} \varphi$, und erstere allein die horizontale Kraft $P = -Lv^2 \operatorname{Cos} \varphi$; man erhält also die Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2gP}{M} = -\frac{2gLv^2 \operatorname{Cos} \varphi}{M}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2gQ}{M}$$

$$= -2g\left(\frac{G}{M} + \frac{Lv^2 \operatorname{Sin} \varphi}{M}\right) \text{ und } v = \frac{ds}{dt}.$$

3) Erstere Gleichung durch $\operatorname{tang} \varphi dt^2$ multiplicirt, und von der zweyten, durch dt^2 multiplicirt, abgezogen, giebt:

$$d^2y - \operatorname{tang} \varphi d^2x = -\frac{2gdt^2 . Lv \operatorname{Cos} \varphi}{M}$$

4) Nun ist $dy = \operatorname{tang} \varphi dx$, also $d^2y \operatorname{tang} \varphi d^2x$

$-\frac{dxd\varphi}{\cos\varphi^2}$; wird dies in voriger Gleichung für d^2y ſubſtituirt, ſo bekommt man:

$$\frac{dxd\varphi}{\cos\varphi^2} = -\frac{2gGdt^2}{M}.$$

5) Da ferner $dx = \cos\varphi ds$, ſo wird $vdt = s = \frac{dx}{\cos\varphi}$, wodurch die erſtere Gleichung aus (2) h in folgende verwandelt:

$$d^2x = -\frac{2gLdx^2}{M\cos\varphi}.$$

6) Dieſe mit der vorhergehenden multiplicirt, giebt:

$$\frac{2gGd^2xdt^2}{M} = \frac{2gLdx\,d\varphi}{M\cos\varphi^3}, \text{ oder}$$

$$\frac{Gdt^2}{L}\cdot\frac{d^2x}{dx^3} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi^3}$$

davon die Integralgleichung:

$$C - \frac{Gdt^2}{2Ldx^2} = \int\frac{d\varphi}{\cos\varphi^3} \text{ iſt.}$$

7) Alſo wird $dt^2 = \frac{2Ldx^2}{G}\cdot\left(C - \int\frac{d\varphi}{\cos\varphi^2}\right)$, und wenn man dies für dt^2 in der Gleichung (4) ſubſtituirt:

$$\frac{dxd\varphi}{\cos\varphi^2} = -\frac{4gLdx^2}{M}\cdot\left(C - \int\frac{d\varphi}{\cos\varphi^3}\right),$$

daraus für dx und dy folgende Werthe entſpringen:

$$dx = -\frac{Md\varphi}{4gL\cos\varphi^2\left(C - \int\frac{d\varphi}{\cos\varphi^3}\right)} \text{ und}$$

$$dy = \text{tang}\,\varphi dx = -\frac{M\,\text{tang}\,\varphi d\varphi}{4gL\,\text{Cos}\,\varphi^2(C - \int \frac{d\varphi}{\text{Cos}\,\varphi^3})}.$$

8) Man ſetze noch tang $\varphi = u$, ſo wird $du = \frac{d\varphi}{\text{Cos}\,\varphi^2}$, folglich $\int \frac{d\varphi}{\text{Cos}\,\varphi^3} = \int du\,\text{Sec}\,\varphi = \int d\acute{u}\sqrt{(1+u^2)}$. Dadurch bekommen die für dx und dy gefundenen Ausdrücke endlich folgende Geſtalt:

$$dx = -\frac{Mdu}{4gL[C - \int du\sqrt{(1+u^2)}]},$$

$$\text{und } dy = -\frac{Mudu}{4gL[C - \int du\sqrt{(1+u^2)}]}.$$

§. 103.

Die Wurzelgröße $\sqrt{(1+u^2)}$ läßt ſich bekanntlich in folgende Reihe auflöſen:

$$\sqrt{(1+u^2)} = 1 + \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{8}u^4 + \tfrac{1}{16}u^6 - \tfrac{5}{128}u^8 + \ldots$$

Dieſe mit du multiplicirt, und dann integrirt, giebt:

$$\int du\sqrt{(1+u^2)} = u + \tfrac{1}{6}u^3 - \tfrac{1}{40}u^5 + \tfrac{1}{112}u^7 - \tfrac{5}{1152}u^9 + \ldots$$

Setzt man daher $\int du\sqrt{(1+u^2)} = \varkappa u$, ſo wird:

$$\varkappa = 1 + \tfrac{1}{6}u^2 - \tfrac{1}{40}u^4 + \tfrac{1}{112}u^6 - \ldots$$

Wenn u kleiner als 1 iſt, ſo läuft dieſe Reihe ſchnell zuſammen, und ſelbſt ihr zweytes Glied wird ſchon in Vergleichung gegen das erſte gering, ſo daß in ſolchen Fällen $\varkappa$ von 1 nur wenig verſchieden ſeyn kann. Für $\varphi = 30°$, oder $u = \sqrt{\frac{1}{3}}$ wird doch nur $\varkappa = 1{,}05318$, ob hier gleich u der Einheit ſchon ziemlich nahe kommt.

So lange also φ unter 30° bleibt, wächst dieser efficient in Vergleichung des Winkels äußerst langn: die ganze Aenderung nemlich, die $\varkappa$ erleidet, wähd der Winkel φ von 0° bis zu 30° anwächst, beträgt ht mehr, als etwa $\frac{1}{20}$ seines anfänglichen Werthes.

Dergleichen Größen nun, die so langsamen Aenrungen unterworfen sind, kann man allezeit da, wo ht die allerstrengste Genauigkeit beobachtet werden ıß, als beständige Größen in den Kalkul einführen,)fern man ihnen nur einen Werth beylegt, der zwien den verschiedenen Werthen, die sie nach und nach kommen können, das Mittel hält.

§. 104.

Der Winkel φ ist im aufsteigenden Bogen der rve abnehmend, und daher jederzeit kleiner als der fängliche Winkel I. Da nun dieser Bogen bey weiı den größten Theil der Bahn des Körpers ausmacht, läßt sich in Fällen, wo I nicht über 30° beträgt, die n gedachte Voraussetzung mit Sicherheit anwenden. ieser zu Folge wird also, wenn man noch $\frac{M}{4gL} = f$ t:

$$dx = -\frac{fdu}{C - \varkappa u} \text{ und}$$

$$dy = -\frac{fudu}{C - \varkappa u}, \text{ oder}$$

$$\frac{\varkappa' dy}{Cf} = \frac{\varkappa du}{C} - \frac{\varkappa du}{C - \varkappa u}$$

von die Integralgleichungen folgende sind:

$$x = A + \frac{f}{\varkappa} . \log (C - \varkappa u)$$

$$y = B + \frac{fu}{\varkappa} + \frac{Cf}{\varkappa^2} \log (C - \varkappa u).$$

§. 105.

Die beſtändige Größe C läßt ſich auf folgende A beſtimmen:

1) Es iſt $dx = ds \operatorname{Cos} \varphi$, alſo $\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} . \operatorname{Cos}$ $= v \operatorname{Cos} \varphi$; ſetzt man daher in der Gleichung §. 10: 6., $\varphi = I$, ſo wird darin $\frac{dx}{dt} = c \operatorname{Cos} I$, folglich

$$C - \frac{G}{2Lc^2 \operatorname{Cos} I^2} = \text{dem Werthe des Integrals}$$

$\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos} \varphi^3}$ für $\varphi = I$.

2) Um $\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos} \varphi^3}$ oder $du \sqrt{(1 + u^2)}$ zu integ ren, ſetze man $\sqrt{(1 + u^2)} = z - u$, ſo erhält m $1 = z^2 - 2uz$, und daraus $u = \frac{z^2 - 1}{2z}$, alſo $du =$ $\frac{(z^2 + 1)\, dz}{2z^2}$; ferner $z - u = \frac{z^2 + 1}{2z}$, folglich:

$$du \sqrt{(1 + u^2)} = (z - u)\, du = \frac{(z^2 + 1)^2 dz}{4z^3}$$

und $\int du \sqrt{(1 + u^2)} = \frac{1}{2} \log z + \frac{1}{8} \left(\frac{z^4 - 1}{z^2}\right)$. S iſt $z^4 = (1 + 2uz)^2 - 1 = 4uz + 4u^2z^2$, und $\frac{z^4 - 1}{z^2}$

$= \frac{4uz+4u^2z^2}{1+2uz} = 4uz - \frac{4u^2z^2}{z^2} = 4u(z-u)$
$= 4u\sqrt{(1+u^2)}$, daher wird:

$\int du\sqrt{(1+u^2)} = \frac{1}{2}u\sqrt{(1+u^2)} + \frac{1}{2}\log$
$[u+\sqrt{(1+u^2)}]$.

3) Setzt man wieder tang φ für u, so bekommt man:

$u+\sqrt{(1+u^2)} = \text{tang}\,\varphi + \text{Sec}\,\varphi = \frac{1+\text{Sin}\,\varphi}{\text{Cos}\,\varphi} =$
$\frac{1+\text{Cos}\,(90°-\varphi)}{\text{Sin}\,(90°-\varphi)} = \frac{2\,\text{Cos}\,(45°-\frac{1}{2}\varphi)^2}{2\,\text{Sin}\,(45°-\frac{1}{2}\varphi)\,\text{Cos}\,(45°-\frac{1}{2}\varphi)}$
$= \text{Cot}\,(45°-\frac{1}{2}\varphi) = \text{tang}\,(45°+\frac{1}{2}\varphi)$, wodurch endlich $\int \frac{d\varphi}{\text{Cos}\,\varphi^3} = \frac{1}{2}\,\text{tang}\,\varphi\,\text{Sec}\,\varphi + \frac{1}{2}\log\text{tang}$
$(45°+\frac{1}{2}\varphi)$ wird.

4) Also ist $C = \frac{G}{2Lc^2\,\text{Cos}\,I^2} + \frac{1}{2}\,\text{tang}\,I\,\text{Sec}\,I$
$+ \frac{1}{2}\log\text{tang}\,(45°+\frac{1}{2}I)$.

§. 106.

Es kommt jetzt noch auf die Entscheidung der Frage an, welchen Werth von ν oder φ man für den mittlern anzunehmen habe? Wofern die Geschwindigkeit des Wurfes c einigermaßen groß ist, so sieht man leicht, daß der Körper den größten Theil des aufsteigenden Bogens hindurch von seiner ersten Richtung abweichen, und folglich der Winkel φ nur erst nahe am Scheitel der Bahn merklich kleiner als I werden könne; also darf man hier keinen andern bestimmten Werth für

φ, als den anfänglichen $= I$ zulassen. Im niedersteigenden Bogen hingegen ist φ Anfangs $= o$, wird nachher $= -I$, und wächst dann während der übrigen Zeit des Fallens noch weiter ins Negative fort, so daß offenbar kein merklicher Fehler entstehen kann, wenn man in diesem Theile der Bahn den mittlern Werth von $\varphi = -T$ setzt. Beyde Winkel nun, sowohl I als $-I$, haben einerley Tangente mit entgegengesetzten Zeichen, und bestimmen folglich $\varkappa$ auf eine und dieselbe Art. Es wird nemlich für beyde $\varkappa = 1 + \frac{1}{6}\operatorname{tang} I^2 - \frac{1}{40}\operatorname{tang} I^4 + \ldots$, oder nach dem im §. 105. 3. gefundenen Integralausdrucke:

$$\varkappa = \tfrac{1}{2}\operatorname{Sec} I + \frac{\log\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}I)}{2\operatorname{tang} I}$$

wodurch folgende Gleichung entsteht:

$$C - \varkappa\operatorname{tang} I = \frac{G}{2Lc^2\operatorname{Cos} I^2}.$$

§. 107.

Man setze in den für x und y (§. 104.) gefundenen Formeln $\varphi = I$, oder $n = \operatorname{tang} I$, so wird

$$o = A + \frac{f}{\varkappa}.\log(C - \varkappa\operatorname{tang} I), \text{ und}$$

$$o = B + \frac{f\operatorname{tang} I}{\varkappa} + \frac{Cf}{\varkappa^2}\log(C - \varkappa\operatorname{tang} I)$$

und daraus:

$$x = \frac{f}{\varkappa}\log\frac{C - \varkappa\operatorname{tang}\Phi}{C - \varkappa\operatorname{tang} I}, \text{ und}$$

$$y = \frac{f}{\varkappa}(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang} I) + \frac{Cf}{\varkappa^2}\log\frac{C - \varkappa\operatorname{tang}\Phi}{C - \varkappa\operatorname{tang} I}.$$

Wenn man nun erstere Gleichung durch C, letztere durch $\varkappa$ multiplicirt, und dann beyde von einander abtrahirt, so bleibt:

$$\varkappa y - Cx = f \text{ tang } \varphi - \text{tang } I)$$

ferner erhält man aus der ersten Gleichung:

$$\varkappa \text{ tang } \varphi = C - (C - \varkappa \text{ tang } I)\, e^{\frac{\varkappa x}{f}}$$

$$\text{oder } \varkappa \text{ tang } \varphi = C - \frac{Ge^{\frac{\varkappa x}{f}}}{2Lc^2 \text{ Cos } I^2}$$

Dies für tang φ in die vorige Gleichung substituirt, giebt endlich:

$$\varkappa y - Cx = \frac{Gf\,(1 - e^{\frac{\varkappa x}{f}})}{2\varkappa Lc^2 \text{ Cos } I^2},$$

oder, wenn für C sein Werth aus §. 105. gesetzt wird:

$$y = x\,(\text{tang } I + \frac{G}{2L\varkappa c^2 \text{ Cos } I^2}) + \frac{Gf\,(1 - e^{\frac{\varkappa x}{f}})}{2L\varkappa^2 c^2 \text{ Cos } I^2}$$

welches eben die Formel ist, die Bezout in s. Cours de Math. à l'usage du corps roy. de l'artill. P. IV. durch einen ähnlichen, wiewohl etwas mühsamern, Kalkul herausbringt.

§. 108.

Setzt man hierin $y = o$, so bekommt man:

$$o = x\,(\text{tang } I + \frac{G}{2L\varkappa c^2 \text{ Cos } I^2}) + \frac{Gf}{2L\varkappa^2 c^2 \text{ Cos } I^2}\,(1 - e^{\frac{\varkappa x}{f}})$$

eine Gleichung mit zweyen Wurzeln $x = o$, und $x =$

AB, wovon letztere sich auf den zweyten Durchschnittspunkt B der Kurve mit der Horizontale AB bezieht, und also die Weite des ganzen Wurfes angiebt.

Man kann diese nicht unmittelbar aus der Gleichung herleiten; hat man aber bereits einen Werth b gefunden, der ihr nahe kommt, so daß, wenn $x = b + i$ gesetzt wird, der unbekannte Theil i nur noch in Vergleichung gegen b gering ist, so läßt sich i auf folgende Art sehr leicht bestimmen:

1) Man nenne der Kürze wegen die zu x und $1 - e^{\frac{\varkappa x}{f}}$ gehörigen Koefficienten A und B, oder drücke die obige Gleichung so aus:

$$o = Ax + B\left(1 - e^{\frac{\varkappa x}{f}}\right),$$

so wird, wenn man darin $x = b + i$ setzt:

$$o = Ab + Ai + B\left(1 - e^{\frac{\varkappa b}{f}} \cdot e^{\frac{\varkappa i}{f}}\right)$$

2) Nun hat man bekanntlich für $e^{\frac{\varkappa i}{f}}$ folgende Reihe:

$$e^{\frac{\varkappa i}{f}} = 1 + \frac{\varkappa i}{f} + \frac{\varkappa^2 i^2}{2f^2} + \frac{\varkappa^3 i^3}{6f^3} + \ldots$$

wovon man hier, weil i klein, und f sehr groß ist (§. 104.), bloß die zwey ersten Glieder zu nehmen braucht. Diese Voraussetzung giebt also $e^{\frac{i}{f}} = 1 + \frac{\varkappa i}{f}$, und daher:

$o =$

$$\ddot{o} = Ab + Ai + B\left(1 - e^{\frac{\varkappa b}{f}}\right) - \frac{\varkappa iB}{f} \cdot e^{\frac{\varkappa b}{f}}$$

3) In dieſer Gleichung iſt $Ab + B\left(1 - e^{\frac{\varkappa b}{f}}\right)$ der Werth von $\ddot{y}$ für $x = b$, alſo bekannt. Man ſetze ihn $= d$, ſo erhält man endlich:

$$\left(\frac{\varkappa B}{f} \cdot e^{\frac{\varkappa b}{f}} - A\right) i = d, \text{ oder}$$

$$i = \frac{df}{\varkappa B \cdot e^{\frac{\varkappa b}{f}} - Af}$$

Exempel. In Hutrons math. and phil. tracts. 9. Abh. findet ſich unter einer Menge von Angaben ballistiſcher Verſuche pag. 263. auch eine Tafel, die außer der anfänglichen Geſchwindigkeit der Kugel zugleich die Schußweite für mehrere Richtungswinkel und Ladungen enthält. Die Geſchwindigkeiten ſind zwar nicht als ganz zuverläßig anzuſehen, da ſie der Verf. nach Robins Methode aus Beobachtungen des Pendelbogens beſtimmt hat, und die Rechnung noch nach der gewöhnlichen Formel anſtellt, die nach Lamberts Bemerkung der Sache nicht völlig angemeſſen iſt; indeß will ich doch eine dieſer Angaben zur Erläuterung des vorigen Kalkuls hier beyfügen;

Eine Kugel von 1,96 engl. Zoll Durchmeſſer, und 16 Unzen 2½ Drachmen Gewicht bekam unter einem Erhöhungswinkel von 15° eine Geſchwindigkeit von 1234 engl. Fuß. Hier hat man alſo $c = 1198{,}73$ $\lambda = 0{,}07934$; $G = 1{,}0651$ Pfund, $\varkappa = 1{,}0118405$, und $L = 0{,}0006234 \cdot \pi a^2$, folglich

$$\log L = 0{,}0907011 - 5$$
$$\log 2\varkappa c^2 \operatorname{Cos} I^2 = 6{,}4335100$$
$$\log 2L\varkappa c^2 \operatorname{Cos} I^2 = 1{,}5244111$$
$$\log G = 0{,}0273920$$
$$\log \frac{G}{2L\varkappa c^2 \operatorname{Cos} I^2} = 0{,}5029809 - 2,$$

dem die Zahl = 0,0318405 zugehör:;
dazu tang I = 0,2679492 addirt,

giebt A = 0,2997897.

Ferner wird, wenn man hier M = G annimmt, log f = 3,1406109, und daraus log B = 1,6384796. Setzt man nun x = 4800, so erhält man $\frac{xx}{f}$ log e = 0,4342944, $\frac{xx}{f}$ = 1,5259023, folglich $e^{\frac{xx}{f}}$ = 33,5662, und B $(1 - e^{\frac{xx}{f}})$ = − 1416,6

Ax = 1439,0

also d = 22,4,

$i = \frac{2240}{77}$ = 29 Fuß, und x = 4829 Fuß.

Die beobachtete Schußweite iſt dagegen nur 4660 engl. oder 4527 rheinl. Fuß: es iſt aber leicht möglich, daß dieſe Abweichung allein in der unrichtigen Angabe der Geſchwindigkeit ihren Grund hat.

§. 109.

Eine zweyte Näherungsmethode, die, wie die vorhergehende, zuerſt von Herrn Bezout angegeben, nachmals aber durch Herrn Krafts Bemühungen *) zu einer größern Vollkommenheit gebracht iſt, beſteht darin, daß man für das Integral $\int du\sqrt{(1 + u^2)}$ die Formel $u + \varkappa u^3$ annimmt, und darin dem Koefficienten $\varkappa$ wieder einen mittlern Werth beylegt. Vergleicht man nun dieſe Formel mit der für $\int du\sqrt{(1 + u^2)}$ (§. 112.) gefundenen Reihe, ſo bekommt man

$$\varkappa = \frac{1}{6} - \frac{1}{40}u^2 + \frac{1}{112}u^4 - \ldots$$

alſo wird z. B.

*) Man ſehe hierüber deſſen Abhandlung in den Actis Acad. Sc. Petrop. 1780 P. I. pag. 154 u. f.

für $\varphi = 0$ oder $u = 0$, $\varkappa = 0{,}16666..$

$\ldots 30° \ldots \sqrt{\frac{1}{3}} \ldots 0{,}15$

$\ldots 45° \ldots 1 \ldots 0{,}14779,$

woraus man leicht ſieht, daß die Größe $\varkappa$ in der Bedeutung, wie ſie hier gebraucht wird, noch weit geringeren Aenderungen unterworfen ſey, als in der erſtern, und daß folglich dies Verfahren nicht allein eine weit größere Genauigkeit gewähre, als das vorige, ſondern auch bey größern Erhöhungswinkeln noch mit gleicher Sicherheit ſich anwenden laſſe; ich kann mich aber, wegen der umſtändlichern Rechnung, die damit verbunden iſt, nicht darauf einlaſſen, es hier weiter auseinander zu ſezen, und muß deshalb auf die erwähnte Abhandlung verweiſen.

Fünftes Kapitel.

Zurückführung der mechaniſchen Geſetze auf das Gleichgewicht.

---

§. 110.

Wenn ein Körper, deſſen Maſſe $= M$ iſt, fortdauernd von einer Kraft P nach einerley Richtung getrieben wird, und dadurch nach Verlauf einer beſtimmten Zeit t die Geſchwindigkeit v bekommt, ſo hat man (§. 50. 9.)

für die augenblickliche Aenderung dieſer Geſchwindi
folgende Gleichung:

$$dv = \frac{2gPdt}{M}$$

Gegenſeitig entſpringt hieraus die Formel:

$$P = \frac{Mdv}{2gdt}$$

für die Kraft, die in jedem Augenblicke die Bewe
des Körpers beſchleunigen oder verzögern muß, r
ſeine Geſchwindigkeit nach irgend einem Geſetze wa
oder abnehmen ſoll.

§. 111.

Man ſetze nun, der Körper erhalte unter gew
Umſtänden eben dieſe Bewegung durch eine andere K
V; ſo folgt nothwendig, daß beyde Kräfte V un
einzeln genommen, einerley Wirkung auf den Kö
ausüben, und alſo in jedem beſtimmten Zeitpunkte ä
pollent ſeyn müſſen. Wird daher die Kraft P nach
gegengeſetzter Richtung auf den Schwerpunkt des K
pers angebracht, ſo entſteht unter den angenomm
Bedingungen zwiſchen ihr und der Kraft V Gleic
wicht.

Dieſe Betrachtung leitet auf eine ſehr einf
Auflöſung folgender Aufgabe:

§. 112.

Die Maſſe M erhält durch eine gegebene Kraf
die nicht unmittelbar auf ihren Schwerpunkt wirkt,
fortgehende Bewegung nach irgend einer geraden Li

man fragt, wie unter dieſen Umſtänden ihre Geſchwindigkeit v für eine gegebene Zeit t zu beſtimmen ſey.

Aufl. Man ſuche die Kraft P, die gegen die Richtung der Maſſe auf ihren Schwerpunkt angebracht, der Kraft V das Gleichgewicht hält; ſo iſt dieſe nach entgegengeſetzter Richtung der Kraft V äquipollent, und beſtimmt alſo das Geſetz der Bewegung. Es wird nemlich, wenn man ſie gefunden hat: $dv = \frac{2gPdt}{M}$.

§. 113.

Fig. 2. **Exempel** I. Die Maſſe gleite von einer ſchiefen Ebene CA herab, die gegen die Horizontale unter dem Winkel CAB $= I$ geneigt iſt.

Hier ſind unter V zwey Kräfte zugleich begriffen: das abſolute Gewicht der Maſſe $= M$, und der Widerſtand, den das Reiben am Boden nach der Richtung AC hervorbringen. Beyden ſoll nun die Kraft P, im Schwerpunkte der Maſſe nach der Richtung AC angebracht, das Gleichgewicht halten; alſo hat man (Statik §. 320.):

$$P = M\ (\mathrm{Sin}\, I - \lambda\, \mathrm{Cos}\, I).$$

folglich $dv = \frac{2gPdt}{M} = 2gdt\ (\mathrm{Sin}\, I - \lambda\, \mathrm{Cos}\, I)$

und in der Vorausſetzung, daß die Friktion von der Geſchwindigkeit v unabhängig ſey:

$$v = c + 2gt\ (\mathrm{Sin}\, I - \lambda\, \mathrm{Cos}\, I)$$

wo c die anfängliche Geſchwindigkeit bedeutet.

§. 114.

II. Auf einer vertikalſtehenden Schraube liegt ei
Laſt M, die durch die Kraft V vermittelſt eines Hebe
armes, deſſen Länge = f iſt, in die Höhe gehoben wir
man ſucht für eine gegebene Zeit t die Geſchwindigk
derſelben.

Man ſetze die Höhe der Schraubengänge = h
ferner, um zugleich die Friktion in Rechnung zu bri
gen, den mittlern Halbmeſſer der Schraube = r, d
Winkel NMO = ϑ (Statik §. 243.), $\frac{h}{2\pi r}$ = tang
$\sqrt{(\text{tang}\,\alpha^2 + \text{tang}\,\vartheta)}$ = tang I, und endlich d
Verhältnißzahl λ = tang ω; ſo iſt der Kraft V i
Schwerpunkte der Laſt die Kraft $P = \frac{2\pi Vf\,\text{tang}\,I}{h\,\text{tang}\,(I+\omega}$
äquipollent (§. 322.).

Hiervon noch das Gewicht der Maſſe abgezoge
das nach entgegengeſetzter Richtung wirkt, bleibt die Kra
P — M übrig, wodurch die Laſt unmittelbar nach ve
tikaler Richtung aufwärts getrieben wird. Man e
hält alſo:

$$dv = 2gdt\left(\frac{P-M}{M}\right) = 2gdt\left(\frac{P}{M} - 1\right)$$

und, wenn V, folglich auch P, unveränderlich iſt:

$$v = c + 2gt\left(\frac{P}{M} - 1\right) = c + 2gt\left[\frac{2\pi Vf\,\text{tang}\,I}{hM\,\text{tang}\,(I+\omega)} - 1\right.$$

§. 115.

Es ſey die Maſſe M noch mit einer zweyten Ma
N in eine ſolche Verbindung gebracht, daß bey ih

Bewegungen eine gegenseitige Rückwirkung der einen auf die andere statt finde. Durch gegebene Kräfte erhälte jede von ihnen ihre eigene Bewegung nach irgend einer geraden Linie, und zwar sey nach Verlauf der Zeit t die Geschwindigkeit der erstern $= v$, die der letztern $= u$; so erhellet aus §. 110., daß diese Bewegungen nach eben den Gesetzen erfolgen würden, wenn statt der vorhandenen Kräfte auf die Schwerpunkte der beyden Massen unmittelbar die Kräfte $P = \frac{Mdv}{2gdt}$ und $Q = \frac{Ndu}{2gdt}$ wirkten. Also müssen diese den gegebenen Kräften in einerley Zeitpunkte der Bewegung äquipollent seyn, und folglich nach entgegengesetzter Richtung angebracht, ihnen das Gleichgewicht halten.

Die Folgerungen, die sich daraus ziehen lassen, sind zur Bestimmung der Geschwindigkeiten v und u allemal hinreichend, wofern man nur die übrigen Bedingungen der Aufgabe damit gehörig zu verbinden sucht. In einzelnen Fällen wird sich dies deutlicher zeigen lassen.

§. 116.

Fig. 14. **Aufgabe.** Die beyden Massen M und N hängen an zweyen mit einander verbundenen Rollen, deren Halbmesser $CA = a$, und $CB = b$ sind. Erstere hat das Uebergewicht, und zieht beym Herabsinken die andere aufwärts; man sucht für eine gegebene Zeit t ihre Geschwindigkeit v, und den von ihr zurückgelegten Raum $AM = x$.

$$Z - N = \frac{Ndu}{2gdt} = \frac{Nbf}{a}, \text{ mithin}$$

$$Z = (1 + \frac{bf}{a}) N = \frac{(a+b)(a-\lambda e) MN}{(a-\lambda e) aM + (b+\lambda e) bN}.$$

3). Die Spannungen der beyden Seile sind also während der ganzen Bewegung unveränderlich, und verhalten sich zu einander, wie $(b+\lambda e) : (a-\lambda e)$.

§. 118.

Ist die Masse N gegeben, so kann man fragen, welches die kleinste Masse M sey, wodurch jene in der kürzesten Zeit zu einer bestimmten Höhe h hinaufgezogen wird. Es soll also Mt ein Minimum, oder d. $(Mt) = o$ seyn, und außerdem hat man noch $gft^2 = h$, folglich auch $d(gft^2) = o$. Hieraus entspringen die Gleichungen

$$Mdt + tdM = o, \text{ und}$$
$$2fdt + tdf = o,$$

die zusammen verbunden, die dritte Gleichung:

$$2fdM = Mdf \text{ geben.}$$

Man setze $f = \frac{p}{q}$, so wird $dp = dq = (a-\lambda e)$ adM, folglich $df = \frac{dp}{q} - \frac{pdq}{q^2} = (\frac{q-p}{q^2})(a-\lambda e)$ adM, und daher:

$$2pq = (q-p)(a-\lambda e)\, aM.$$

Substituirt man nun für p und q ihre Werthe, so erhält man endlich folgende Gleichung:

$$M^2-\left(\tfrac{1}{2}-\frac{b}{2a}\right)\left(\frac{b+\lambda e}{a-\lambda e}\right)MN=\frac{b}{a}\left(\frac{b+\lambda e}{a-\lambda e}\right)^2.N^2,$$

der ſich das geſuchte M leicht beſtimmen läßt.

§. 119.

Sieht man dagegen M als gegeben an, ſo läßt) auf gleiche Art beſtimmen, welches die größte Laſt ſey, die von M in der kürzeſten Zeit zur Höhe h ge- ben wird.

Hier iſt nemlich $\frac{N}{t}$ ein Maximum, und man hat ſo außer der erſtern Gleichung $2fdt + tdf = o$ noch t zweyte:

$$tdN - Ndt = o,$$

e beyde in Verbindung

$$2fdN + Ndf = o \text{ geben.}$$

Setzt man nun wieder $f = \frac{p}{q}$, ſo wird $dp = -$ $)+\lambda e)\,adN$, und $dq = (b+\lambda e)\,bdN$, alſo df $= -\left(\frac{aq+bp}{q^2}\right)(b+\lambda c)\,N$, wodurch ſich die vorige)leichung in folgende verwandelt:

$$2pq = (b+\lambda e)(aq+bp)N$$

Das rechter Hand ſteht, wird nach verrichteter Subſti- ution $= (a-\lambda e)(b+\lambda e)(a^2+ab)MN$, wel- es mit $a-\lambda e)(q-p)aM$ einerley iſt. Daher kommt man hier eben die Gleichung zwiſchen M und I, als im vorigen §., und beyde Forderungen ſind)lglich gleichbedeutend.

§. 120.

1. Wenn nur eine Rolle vorhanden iſt, ſo wird b $= a$ alſo $f = \frac{M(a-\lambda e) - N(a+\lambda e)}{M(a-\lambda e) + N(a+\lambda e)}$, und die Spannung des Seiles $= \frac{2MN(a+\lambda e)}{(a-\lambda e)M + (a+\lambda e)N}$

2. Ferner erhält man für das vortheilhafteſte Verhältniß zwiſchen M und N die Gleichung:

$$M^2 + \left(\frac{a+\lambda e}{a-\lambda e}\right) MN = \left(\frac{a+\lambda e}{a-\lambda e}\right) N^2$$

woraus $M = (\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}})\left(\frac{a+\lambda e}{a-\lambda e}\right) N$, oder:

$$M : N = (\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4}}) : (1 - \frac{2\lambda e}{a+\lambda e}) \text{ wird.}$$

3. Nach De la Hire *) iſt die Kraft, die der Menſch anzuwenden vermag, um ſeinen Körper mit den Armen in die Höhe zu heben, um 20 ℔ größer, als ſein Gewicht, das man im Durchſchnitte zu 140 ℔ annehmen kann. Wir wollen beydes, Kraft und Gewicht des Menſchen, gleich ſetzen, ſo wird die vortheilhafteſte Laſt, die er vermittelſt einer Rolle aufzuwinden im Stande iſt, $= 140 ℔ \times (\sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}) \cdot \left(\frac{a-\lambda e}{a+\lambda e}\right)$

$= 85\frac{1}{2} ℔ \left(1 - \frac{2\lambda e}{a+\lambda e}\right)$.

Der Menſch ſinkt nemlich bey jedem Zuge, den er mit dem einen Arme verrichtet, durch einen kleinen

*) Memoires de l'acad. de Paris 1699 pag. 154.

uch (der vorhin h genannt wurde) mit beſchleunig-
Bewegung herab, und überläßt ſodann die Laſt ſo
ige ihrer eigenen Bewegung, bis er ſich mit dem an-
n Arme zu einem zweyten Zuge erhoben hat. Alſo
hört dieſe Bewegung zu denen, die zwar im Ganzen
nommen gleichförmig zu ſeyn ſcheinen, aber eigentlich
kleinen Zeitabtheilungen beſchleunigt ſind, und nur
ch nahe auf einander folgende Ruhepunkte immer
n neuem wieder unterbrochen werden. Das Fort-
cken der Laſt nach vollendetem Zuge, bevor der fol-
nde Zug beginnt, iſt hier wegen ſeiner kurzen Dauer
ßer Acht gelaſſen; indeß läßt ſich auch dieſe Bewe-
ng, wie wir im folgenden Kapitel ſehen werden, zu-
ich mit in Rechnung bringen.

§. 121.

Aufgabe. Es werde die Maſſe N von der Maſſe vermittelſt eines Flaſchenzuges, der in jeder Flaſche Rollen enthält, aufwärts gezogen; man fragt, zu welcher Höhe ſie in einer gegebenen Zeit t ſteigen müſſe.

Aufl. 1) Da M herabſinkt, und N in die Höhe ſteigt, ſo ſind wieder die Kräfte $M - P$ und $N + Q$ gegen einander im Gleichgewichte; man hat alſo die Gleichung:

$$2n(M - P) = N + Q, \text{ oder}$$

$$2nM\left(1 - \frac{dv}{2gdt}\right) = N\left(1 + \frac{dv}{2gdt}\right)$$

2) Wenn nun die Maſſe N durch den Raum dx in dt hinaufrückt, ſo wird jedes Seilſtück zwiſchen

der übrigen Massen, so müssen diese insgesammt den gegebenen Kräften äquipollent seyn, und folglich noch entgegengesetzten Richtung angebracht, ihnen das Gleichgewicht halten.

Es wäre überflüßig, diese Methode noch durch andere hieher gehörige Beyspiele zu erläutern, da die in den folgenden Kapiteln abzuhandelnden Materien uns Gelegenheit genug zu ihrer Anwendung darbieten werden.

Beharrungszustand der Bewegung.

§. 124.

Es giebt beschleunigte Bewegungen, bey denen die Geschwindigkeit Anfangs $= o$ ist, und sich darauf durch stete Zunahme nach und nach einer bestimmten Grenze ins Unendliche nähert. Diese Grenze erreicht sie zwar, im strengsten Verstande genommen, nie; sie kann ihr aber doch binnen einer gewissen Zeit schon so nahe gekommen seyn, daß man auf den noch fehlenden Unterschied keine Rücksicht zu nehmen braucht. Bey den meisten Bewegungen solcher Art geschieht dies sehr bald, und die Geschwindigkeit ändert sich folglich alsdann die ganze übrige Zeit hindurch, so lange auch die Bewegung dauern mag, nur noch unmerklich, so daß man berechtigt ist, sie mit ihrer Grenze zu verwechseln, oder die Bewegung selbst als vollkommen gleichförmig anzusehen. Man sagt in diesem Falle von ihr, sie sey in den **Beharrungszustand** gekommen.

Ein

Ein Beyspiel dieser Art giebt (§. 88.) das Herabfallen eines Körpers durch die Luft; setzt man nemlich das Gewicht, das ihm in der Luft übrig bleibt, $= G$, so wird die Grenze seiner zunehmenden Geschwindigkeit $= \sqrt{\frac{G}{L}}$, und es hängt allein von der Größe des Widerstandes ab, wie bald sie dieser Grenze nahe genug kommen wird, um die Bewegung als gleichförmig annehmen zu können. Bey der Glaskugel (§. 94.) wäre z. B. $M = 0{,}0694407$, $G = 0{,}066406$, $L = 0{,}0006234\pi a^3 = 0{,}00083461$, $\kappa = \sqrt{\frac{G}{L}} = 28{,}207$ Fuß, und $\omega = \frac{2g\sqrt{GL}}{M} = 1{,}059452$; folglich ihre Geschwindigkeit nach Verlauf einer Zeit von 5 Sekunden $= \kappa\left(\frac{e^{10\omega} - 1}{e^{10\omega} + 1}\right) = 28{,}206$ Fuß. Ihr Fallen ließe sich also von dieser Zeit an schon vollkommen als gleichförmig ansehen, da die Geschwindigkeit in der ganzen folgenden Zeit höchstens nur noch um $\frac{1}{10000}$ Fuß wachsen könnte.

§. 125.

Im Beharrungszustande ist die bewegende Kraft mit dem gesammten Widerstande, der ihr entgegenwirkt, im Gleichgewichte.

Es sey die in Bewegung gesetzte Masse $= M$, ihre Geschwindigkeit in einem Augenblicke, wo sie noch im Wachsen ist, $= v$, die auf sie wirkende Kraft $= V$,

der Widerstand = R; so müssen die drey Kräfte V, R und $\frac{Mdv}{2gdt}$, wenn letztere nach einer der Bewegung entgegengesetzten Richtung auf den Schwerpunkt der Masse angebracht wird, einander das Gleichgewicht halten.

Ist nun die Bewegung bereits in den Beharrungszustand gekommen, so leidet die Geschwindigkeit v keine weitern Aenderungen mehr, oder es ist $dv = 0$, also auch die Kraft $\frac{Mdv}{2gdt} = 0$; folglich sind alsdann noch die Kräfte V und R für sich allein mit einander im Gleichgewichte.

§. 126.

Gegenseitig folgt, daß wenn Kraft und Widerstand sich mit einander ins Gleichgewicht setzen, die Bewegung der Masse, die von der Kraft getrieben wird, in den Beharrungszustand komme. Man setze nemlich, wie vorhin, ihre Geschwindigkeit = v, so sind die drey Kräfte V, R und $\frac{Mdv}{2gdt}$ unter sich im Gleichgewichte. Wenn nun von diesen die erstern beyden Kräfte für sich einander das Gleichgewicht halten, so kann es zwischen allen dreyen nicht mehr bestehen, wofern nicht $\frac{Mdv}{2gdt}$ verschwindet; also muß in diesem Falle $dv = 0$, und folglich v eine unveränderliche Größe seyn.

§. 127.

In manchen Fällen, zumal wenn die anfängliche

eschleunigung nur einen geringen Theil der ganzen ewegung ausmacht, kann man sich begnügen, bloß t dem Beharrungszustande der Bewegung bekannt seyn, ohne daß man den allmähligen Uebergang zu sem von der Ruhe an in Betracht zu ziehen nöthig t. Hierdurch wird die Auflösung vieler mechanischen robleme sehr erleichtert; ja oft ist dies das einzige ittel, zu einem brauchbaren Resultate zu gelangen, nn das Gesetz der Bewegung im Allgemeinen zu ver- ickelt, und seine Bestimmung mit zu großen Schwie- gkeiten verbunden ist.

So ließe sich z. B. die Geschwindigkeit des fallen- n Körpers nach vollendetem Wachsthum ohne Rück- ht auf die vorhergehende anfängliche Beschleunigung f folgende Art finden. Sie sey $= c$, so ist der Wi- rstand $= Lc^2$, folglich, da dieser mit der bewegenden raft G im Gleichgewichte seyn muß: $G = Lc^2$, mit- $c = \sqrt{\frac{G}{L}}$.

Sechstes Kapitel.

on den Kräften der Menschen und Thiere bey Bewegungen.

---

§. 128.

s sey das Gewicht eines Menschen von mittlerer Sta- und Stärke $= G$; die größte Last, womit er bela-

den werden kann, ohne zu sinken, $= K$; so ist seine ganze Körperkraft mit der Last $G + K$ im Gleichgewichte, oder die Summe aller Kräfte, die er nach vertikaler Richtung anzuwenden vermag, ist einer einzigen Kraft $G + K$, deren Richtung durch seinen Schwerpunkt geht, äquipollent.

§. 129.

Diese Kraft behält er, wie die Erfahrung lehrt, auch dann, wenn seine Kniee gebogen sind. Er hat also das Vermögen, mit einer Last P, die kleiner als K ist, aus einer solchen gebogenen Stellung sich in die Höhe zu richten, und seine Kniee zu strecken. Dies geschieht nemlich, indem er die Füße gegen den Boden, der ihm zur Unterstützung dient, mit seiner ganzen Kraft $G + K$ gegendrückt, und so seinen Körper sowohl, als die ihm aufgelegte Last hinaufhebt.

Man setze die Geschwindigkeit, die beyde dadurch nach einer gewissen Zeit t erhalten, $= u$, so sind, der Widerstand $G + P$, und die virtuelle Kraft $\frac{(G+P)\,du}{2gdt}$ zusammen genommen, mit der bewegenden Kraft $G + K$ im Gleichgewichte; also hat man

$$G + P + \frac{(G+P)\,du}{2gdt} = G + K,$$

$$\text{oder } du = 2gdt\left(\frac{K-P}{G+P}\right),$$

$$\text{folglich } u = 2gt\left(\frac{K-P}{G+P}\right),$$

und die Höhe x, zu der sein Schwerpunkt während der Zeit t vertikal aufwärts getrieben wird $= \frac{gt^2(K-P)}{G+P}$.

Diese Bewegung dauert aber nur so lange, als seine Füße den Boden berühren; so bald dies nicht mehr geschieht, hört die Beschleunigung auf, und sein Schwerpunkt erhebt sich dann noch mit der zuletzt erhaltenen Geschwindigkeit zu einer Höhe, die dieser Geschwindigkeit als Fallhöhe zugehört.

§. 130.

Nach de la Hire kann ein knieender Mensch mit einer fremden Last von 150 ℔ 2 bis 3 Zoll in einer Sekunde sich in die Höhe heben. Wenn man nun sein eigenes Gewicht G zu 140 ℔ annimmt, so erhält man nach der vorhergehenden Formel $15\frac{5}{8}$ *) $(K - 150) = \frac{1}{4} \times 290$, also

$K = 155$ ℔ beynahe.

Dies Gewicht läßt sich aber nur, wie begreiflich ist, als ein mittleres Maaß menschlicher Kraft annehmen. Bey sehr starken Leuten kann es wohl über 200 ℔ betragen, und man wird es dagegen, wenn von anhaltender Anstrengung der Kraft die Rede ist, viel kleiner als 150 ℔ annehmen müssen. Euler *) setzt in diesem Betracht $K = 60$ ℔.

Vom Gange belasteter Menschen.

§. 131.

Aufgabe. Es sey, wie vorhin, K die größte

*) Mem. de l'acad. de Berlin 1772 pag. 161.

Laſt, die ein Menſch im Gleichgewichte zu halten vermag, wenn er ſtill ſteht; c die Geſchwindigkeit ſeines ſchnellſten Ganges, wenn er mit keinem fremden Gewichte beladen iſt; man ſucht die Geſchwindigkeit v, womit er eine gegebene Laſt P, die kleiner als K iſt, auf horizontalem Boden forttragen kann.

Fig. 15. Aufl. 1) Man ſetze die Länge ſeines Beines CB = a, die Weite ſeines natürlichen Schrittes AB = 2b. Wenn er mit dem vordern Fuße B bis zu dieſer Weite ausgetreten iſt, ſo liegt ſein Schwerpunkt C am tiefſten. Er erhebt ihn nach und nach, indem er ſich um den Unterſtützungspunkt B dreht, durch einen Bogen, der CB zum Halbmeſſer hat, und läßt während dieſer Zeit das hintere Bein ſo lange vorwärts rücken, bis beyde in der durch B gehenden Vertikale BG zuſammen kommen.

2) In dieſer Stellung hat ſein Schwerpunkt die größte Höhe erreicht. Er läßt ihn hierauf durch die andere Hälfte des Bogens wieder herabſinken, während er das andere Bein zu einem zweyten Schritte Ba ausſtreckt, und wenn er endlich den Fuß in a niederſetzt, kommt der Schwerpunkt c wieder in dieſelbe Lage, die er in C hatte, oder hat eben die Höhe über dem Boden, als zu Anfange.

3) Zugleich iſt derſelbe dann um die Weite Cc = AB = 2b nach horizontaler Richtung fortgerückt. Nennt man alſo die Zeit, die zwiſchen zweyen Fußtritten B und a, oder während eines Schrittes verfließt, = T, ſo wird Tv = 2b, folglich $v = \frac{2b}{T}$.

4) Wenn nun diese Bewegung einmal eingeleitet ist, so hat der Mensch weiter keine Kraft anzuwenden nöthig, um sie zu unterhalten, als daß er nach jedesmaligem Austreten den Schwerpunkt von seiner niedrigsten Stelle C bis zur höchsten G, also durch den vertikalen Raum DG, erheben muß. Man setze diesen Raum $= h$, so hat man: $h = a - \sqrt{(a^2 - b^2)}$.

5) Es sey ferner für eine unbestimmte Zeit t die Geschwindigkeit des Schwerpunktes $= u$, der Raum, durch den er während dieser Zeit gestiegen ist, $= x$, so wird, wenn man (§. 129.) $\frac{K - P}{G + P} = p$ setzt, $u = 2gpt$, und $x = gpt^2$.

6 Diese Beschleunigung dauert aber nur so lange, bis der Schwerpunkt eine Geschwindigkeit u bekommen hat, womit er, sich selbst überlassen, zu einer Höhe gelangt, die den bereits zurückgelegten Raum x zur ganzen Höhe h, die er erreichen muß, ergänzt. Da er nun mit der Geschwindigkeit u noch bis zur Höhe $\frac{u^2}{4g}$ (§. 41. 4.) steigt, so hat man:

$$x + \frac{u^2}{4g} = h,$$

oder, wenn man für x und u ihre Werthe (5) substituirt,

$$gpt^2 + gp^2t^2 = h,$$

woraus die Dauer der Beschleunigung $t = \sqrt{\frac{h}{gp(1+p)}}$ wird.

7) Dieſen Werth von t in u geſetzt, giebt für die Geſchwindigkeit, wobey die Beſchleunigung aufhört: $u = 2\sqrt{\frac{ghp}{1+p}}$. Nennt man alſo die Zeit des übrigen Steigens $= t'$, ſo iſt $2gt' = 2\sqrt{\frac{ghp}{1+p}}$, und $t' = \sqrt{\frac{hp}{g(1+p)}} = pt$.

8) Alſo die Zeit, worin der Schwerpunkt von C bis G gelangt, $= t + t' = (1+p)\,t + \sqrt{\frac{h(1+p)}{gp}}$. Hierzu noch die Zeit addirt, die er zubringt, um von G bis c herabzuſinken, giebt die Zeit T des ganzen Schrittes.

9) Dieſe letztere Zeit iſt aber genau der vorhergehenden gleich: denn, wenn der Schwerpunkt die Zeit t' hindurch gefallen iſt, und dadurch die Geſchwindigkeit $2gt' = 2\sqrt{\frac{ghp}{1+p}}$ erlangt hat, die er vorhin zu Ende der Zeit t hatte (7), ſo muß der Menſch nun wieder ſeine ganze Kraft G + K anwenden, um dieſe Geſchwindigkeit nach und nach zu vernichten, damit ſie im Punkte c = o ſey. Setzt man alſo die Zeit dieſer Verzögerung $= t''$, ſo muß

$$2gt' - 2gpt'' = o, \text{ folglich}$$

$$t'' = \frac{t'}{p} = t \text{ ſeyn.}$$

10) Demnach iſt $T = 2\sqrt{\frac{h(1+p)}{gp}} = 2\sqrt{}$

$\frac{h(G+K)}{g(K-P)}$, und daher $v = \frac{2b}{T} = b\sqrt{\frac{g(K-P)}{h(G+K)}}$,
oder $v^2 = \frac{b^2 g(K-P)}{h(G+K)}$.

11) Hierin $P = o$ gesetzt, giebt $c^2 = \frac{b^2 gK}{h(G+K)}$;
also wird: $\frac{v^2}{c^2} = \frac{K-P}{K}$, und $v = c\sqrt{(1-\frac{P}{K})}$.

§. 132.

Die Kraft K muß hier offenbar viel kleiner angenommen werden, als sie im §. 130. gefunden ist, weil sie beym Gange abwechselnd nur durch die Muskeln des einen Beines ausgeübt werden kann, auf dem jedesmal die ganze Last ruhet. Setzen wir mit **Lambert** die Länge des Beines $a = 2\frac{1}{2}$ Rheinl. Fuß, die Weite des natürlichen Schrittes $2b = 2$ Fuß, und die Geschwindigkeit des schnellsten Ganges $c = 5\frac{1}{2}$ Fuß *), so wird $h = \frac{5-\sqrt{21}}{2} = 0{,}2$ Fuß beynahe. Diese Werthe für c, b und h in die für c erhaltene Formel substituirt, geben

$$6(G+K) = 15\frac{6}{8}K,$$

woraus man $K = \frac{48}{77} G = 87$ ℔ erhält.

*) Größer darf man diese Geschwindigkeit, da hier vom bloßen Gange die Rede ist, nicht wohl annehmen. Beym Laufen kann sie allerdings die angegebene Grenze übersteigen: wovon aber der Grund in einer zweckmäßigen Beugung der Kniee liegt, die diese Bewegung vom eigentlichen Gange wesentlich unterscheidet, und die den Vortheil gewährt, daß dadurch die Höhe h, zu der der Schwerpunkt bey jedem Schritte gehoben werden muß, um ein Merkliches vermindert wird.

§. 133.

Aus der Formel $v = c\sqrt{(1 - \frac{P}{K})}$ erhält man gegenseitig

$$P = K\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right),$$

wodurch die Last bestimmt wird, die ein Mensch tragen kann, wenn er dabey zugleich mit einer gegebenen Geschwindigkeit v fortschreitet.

Anmerk. Diese Formel wurde zuerst von Herrn Euler in die Maschinenlehre eingeführt *). Nachmals verwarf er sie zwar wieder, und setzte statt ihrer: $P = K\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2$, allein blos aus dem Grunde, weil letztere mit einer bekannten hydrodynamischen Formel übereinkommt, die die Wirkung des Stoßes flüßiger Materien angiebt **). Bouguer bedient sich in s. Manoeuvre des Vaisseaux Liv. I. Sect. 2. pag. 142. der einfachern Formel $P = K\left(1 - \frac{v}{c}\right)$, die aber meines Wissens von Niemanden nachher weiter gebraucht ist.

§. 134.

Wir haben bisher angenommen, der Mensch verwende auf die Bewegung seine ganze Kraft $G + K$, die er nach vertikaler Richtung auszuüben im Stande ist; man sieht aber leicht, daß eine solche Anstrengung ihn in kurzer Zeit ermüden, und zu fernerer Arbeit untauglich machen würde. Daher bleibt noch zu unter-

*) S. Mem. de l'acad. de Berlin 1747 und Nov. Comment. Petrop. Tom. JJJ.

**) Mem. de l'acad. de Berlin 1752 und Nov. Comment. Petrop. Tom. VJJI.

ſuchen übrig, in wiefern die vorhin gefundene Formel abgeändert werden müſſe, wenn man zugleich auf eine anhaltende Dauer der Bewegung Rückſicht nehmen will.

Man ſetze, der Menſch gebrauche während der ganzen Bewegung nur einen Theil ſeiner völligen Kraft $= G + W$, ſo daß $W < K$ angenommen wird, ſo bleibt ihm zu Anfange noch die Kraft $K - W$ zum allmähligen Erſatze deſſen, was nach und nach verloren geht, übrig. Die fortgeſetzte Anwendung der Kraft $G + W$ raubt ihm nun von dieſem Ueberreſte $K - W$ von Zeit zu Zeit immer mehr und mehr, und zwar iſt es ſehr natürlich, anzunehmen, daß der Verluſt in einerley Zeit der Kraft $G + W$ ſelbſt proportional ſey; wir können ihn alſo für jedes Zeitmoment $dt = \frac{1}{n} . (G + W) dt$ ſetzen.

Nach Verlauf einer Zeit t beträgt demnach dieſer Verluſt $\frac{1}{n} . (G + W) t$, und wenn T die Zeit heißt, worin die ganze Kraft $K = W$ erſchöpft wird, ſo hat man:

$$\frac{1}{n} (G + W) T = K - W, \text{ folglich:}$$

$$T = \frac{n (K - W)}{G + W}.$$

Nach dieſer Zeit kann alſo die Kraft $G + W$ nicht mehr ergänzt, folglich auch nicht ferner mehr in Ausübung gebracht werden.

§. 135.

Hieraus läßt sich zuvörderst herleiten, welche vortheilhafteste Last W sey, die der Mensch im ru den Zustande zu tragen, oder im Gleichgewichte zu ten vermögend ist. In diesem Betracht muß nen das Produkt WT aus der Last W in die mög Dauer der Anstrengung T ein Maximum seyn; braucht man nun für T den eben gefundenen W so erhält man:

$$d.n\left(\frac{KW - W^2}{G + W}\right) = o, \text{ oder:}$$

$$(K - 2W)(G + W) - KW + W^2 =$$

woraus für W die Gleichung:

$$W^2 + 2GW - KG = o \text{ entspringt.}$$

Aus dieser wird $W = \sqrt{(KG + G^2)} - G$, wenn man $K = 150$ ℔, $G = 140$ ℔ setzt, W $61\frac{1}{2}$ ℔, wofür wir mit Euler 60 ℔ annehi wollen.

§. 136.

Wir wollen jetzt eben diese Betrachtung auch den Fall anwenden, wo eine Last P gegeben ist, und Geschwindigkeit v bestimmt werden soll, womit Mensch diese Last forttragen kann. Es sey G + die vortheilhafteste Kraft, die er dazu fortdauernd wenden darf, so wird, wenn man in der für v (§. 1 10.) gefundenen Formel W statt K, und der Ki wegen den beständigen Faktor $\frac{b^2 g}{h} = f^2$ setzt, $v^2 =$

$\left(\frac{W-P}{G+W}\right)$, und da hier Tv ein Maximum seyn muß:

$d(Tv) = o$, oder, welches einerley ist:

$$d(T^2v^2) = d\left(f^2n^2\frac{(K-W)^2.(W-P)}{(G+W)^3}\right) = o.$$

Nach angestellter Differenziation erhält man nun:

$$(G+W)[(K-W)^2-2(W-P)(K-W)] = 3(K-W)^2(W-P)$$

oder $(G+W)(K+2P-3W) = 3(K-W)(W-P)$

woraus $W = \frac{KG+2GP+3KP}{3G+2K+P}$ wird.

Dies für W in v^2 substituirt, giebt ferner:

$$\frac{v^2}{f^2} = \frac{KG+KP-GP-P^2}{3G^2+3GP+3KG+3KP} = \frac{(G+P)(K-P)}{3(G+P)(G+K)},$$

also $v^2 = \frac{1}{3}f^2\left(\frac{K-P}{G+K}\right)$.

§. 137.

Man nenne x die vortheilhafteste Geschwindigkeit, womit ein Mensch gehen muß, dem gar keine Last weiter aufgelegt ist, so wird für $P = o$, $v = x$, also

$$x^2 = \frac{1}{3}f^2.\frac{K}{G+K} = \frac{1}{3}c^2 \text{ (§. 131. II.)}$$

Nimmt man nun, wie oben (§. 132.), $c = 5\frac{1}{2}$ Fuß an, so bekommt man $x = \frac{11\sqrt{3}}{6} = 3,175$ Fuß. Mit dieser Geschwindigkeit würde er eine deutsche Meile, die nach den genauesten Rechnungen 3805 Toi-

ſen, oder 23630 Rheinl. Fuß enthält, in einer Zeit von 7442 Sec. oder 2 Stunden 4 Min. zurücklegen, die man auch für den gewöhnlichen Schritt der Fußgänger auf die Meile feſtzuſetzen pflegt.

§. 138.

Wenn man die letztere Gleichung in die vorhergehende dividirt, ſo erhält man:

$$\frac{v^2}{\varkappa^2} = 1 - \frac{P}{K}, \text{ oder}$$

$$v = \varkappa\sqrt{\left(1 - \frac{P}{K}\right)}$$

eine Gleichung, die mit der zuerſt gefundenen (§. 131.) in der Form einerley iſt.

Um hieraus endlich noch die Laſt und Geſchwindigkeit zu beſtimmen, bey denen das Produkt Pv ein Maximum wird, ſetze man $d \cdot Pv = d\left(v - \frac{v^3}{\varkappa^2}\right) = 0$. Dadurch wird $3v^2 = \varkappa^2$, oder $v = \varkappa\sqrt{\frac{1}{3}}$, und $P = \frac{2}{3}K$.

Wir wollen $K = 60$ ℔, und $\varkappa = 3\frac{1}{2}$ Fuß annehmen, ſo iſt die vortheilhafteſte Laſt für den Menſchen $= 40$ ℔, und dieſe trägt er mit 2 Fuß Geſchwindigkeit.

Anmerk. Herrn Coulombs Abhandlung über die Kräfte des Menſchen in den Mem. de l'inſt. nat. an VII. pag. 380. iſt beſonders wegen der darin mitgetheilten Beobachtungen ſchätzungswerth, wiewohl dieſe ſich größtentheils nur auf Leute von vorzüglicher Stärke beziehen, und alſo in ſofern nicht geradezu für die Ausübung brauchbar ſind.

Nach dem Berichte der ſtärkſten Laſtträger können dieſe den Tag über eine Laſt von 44 Kilogram oder 90,86 Pfund

auf eine Weite von höchstens 20 Kilometern forttragen. Da nun das Kilometer 3079,458 pariſ. oder 3187,936 rheinl. Fuß enthält, ſo giebt dies, den Arbeitstag zu 10 Stunden gerechnet, eine Geſchwindigkeit $v = 1{,}77107$ Fuß in 1 Sec.

Um hiernach die Werthe von c und K zu beſtimmen, hat man zuvörderſt

$$v^2 = \tfrac{1}{3} c^2 (1 - \frac{P}{K}), \text{ und}$$

$c^2 = \frac{b^2 g K}{h (G+K)}$ (§. 131. II.), oder $K = \frac{c^2 h G}{b^2 g - c^2 h}$; daher wird ferner:

$$3v^2 = c^2 (1 + \frac{P}{G}) - \frac{b^2 g P}{hG}, \text{ und folglich}$$

$$c^2 = (3v^2 + \frac{b^2 g P}{hG}) : (1 + \frac{P}{G}).$$

Setzt man nun, wie oben (§. 132.), $b = 1$ Fuß. $h = 0{,}2$ Fuß, $G = 140$ Pfund, und nach der gegenwärtigen Angabe $P = 90{,}86$ Pfund, $v = 1{,}771$ Fuß, ſo erhält man $c^2 = 37{,}052'$, $c = 6{,}0875'$, und $\varkappa = c\sqrt{\tfrac{1}{3}} = 3{,}5143'$; woraus ſich $K = 126$ Pfund ergiebt.

Eine andere von ihm ſelbſt gemachte Beobachtung iſt folgende: Er ließ durch einige Arbeiter Meubeln aus ſeiner Wohnung zu einem andern, 2 Kilometer, oder 6378 Fuß davon entlegenen Hauſe hinübertragen. Die jedesmalige Laſt für jeden einzelnen Mann betrug 58 Kilogram = 119,77 Pfd., und damit konnten ſie in einem Tage 6 Gänge machen; doch war dieſe Arbeit für ſie ſo anſtrengend, daß ſie es nicht vermogten, ſie den folgenden Tag fortzuſetzen.

Nach der vorhin erhaltenen Geſchwindigkeit eines unbelaſteten Menſchen $\varkappa = 3{,}5143'$ beträgt die Zeit, die ſie auf die Rückwege verwenden mußten, etwa 3 Stunden; dieſe von 10 Stunden abgezogen, bleibt für die Zeit des eigentlichen Tragens 7 Stunden übrig, die in Sekunden verwandelt, und in das Sechsfache des obigen Weges dividirt, eine Geſchwindigkeit $v = 1{,}518$ Fuß giebt. Subſtituirt man dieſen Werth für v in die Formel $P = K (1 - \frac{v^2}{\varkappa^2})$, und ſetzt außerdem nach voriger Rechnung $K = 126$ Pfund, $\varkappa = 3{,}5143'$, ſo

bekommt man P = 103 Pfund, also nicht ganz so viel, als die wirkliche Last betrug, wie denn dies nach der angeführten Bemerkung auch nicht anders zu erwarten ist.

§. 139.

Aufgabe. Die Geschwindigkeit v zu bestimmen, womit ein Mensch auf schrägem Boden eine gegebene Last P in die Höhe tragen kann.

Aufl. 1) Man setze den Neigungswinkel des Bodens = I, die Weite eines natürlichen Schrittes auf diesem = f, so ist die Höhe, zu der der Schwerpunkt bey jedem Schritte gehoben werden muß, = h + f Sin I. Dies in §. 131. 8. statt h gesetzt, giebt die Zeit seines Steigens $= \sqrt{\frac{(1+p)(h+f\,\mathrm{Sin}\,I)}{pg}}$.

2) Die übrige Zeit, worin er durch den Raum h wieder vertikal herabsinkt, ist dagegen, wie dort, $= \sqrt{\frac{(1+p)h}{pg}}$.

3) Beydes addirt, giebt die Zeit des ganzen Schrittes $T = \sqrt{\frac{1+p}{pg}} \cdot [\sqrt{h} + \sqrt{(h+f\,\mathrm{Sin}\,I)}]$.

4) Also wird $v^2 = \frac{f^2}{T^2} = \frac{f^2 pg}{1+p} : [\sqrt{h}+\sqrt{(h+f\,\mathrm{Sin}\,I)}]^2 = \left(\frac{K-P}{G+K}\right) \cdot \frac{f^2 g}{[\sqrt{h}+\sqrt{(h+f\,\mathrm{Sin}\,I)}]^2}$.

§. 140.

Die beyden Größen f und h lassen sich hier nicht so leicht und sicher angeben, als in dem vorhin betrachteten

ten besondern Falle, wo $I = o$ ist. Die Weite des Schrittes f ist unstreitig von dem Neigungswinkel abhängig, und wird, wie die Erfahrung lehrt, desto kleiner, je steiler der Boden ist; man kann also, da für $I = o$, $f = 2b$ ist, im Allgemeinen $f = 2b \operatorname{Cos} I^n$ setzen. Bey Treppen, die 30° Neigung haben, giebt man der Regel nach den Stufen 1 Fuß Breite im freyen Auftritte, d. h. es ist für diese Schiefe $f = b\sqrt{\frac{3}{4}} = 1{,}1547\,b$. Wir wollen für $I = 45°$, $f = b$ annehmen, so wird $(\operatorname{Cos} 45°)^n = \frac{1}{2}$, folglich $n = 2$, und daher $f = 2b \operatorname{Cos} I^2$.

Was die Größe h betrift, so ist diese schon an sich im Verhältnisse gegen f kleiner, als beym horizontalen Gange, und wird dadurch noch mehr vermindert, daß man das Knie, das beym Austreten nothwendig gebogen werden muß, nie ganz gerade streckt, auch wenn der Schwerpunkt seine größte Höhe erreicht hat. Sie mögte daher gegen die Höhe $f \operatorname{Sin} I$, zu der der Körper bey jedem Schritte wegen der Schiefe des Bodens gehoben wird, zumal wenn diese einigermaßen beträchtlich ist, wohl kaum in Anschlag zu bringen seyn.

§. 141.

Um den Neigunpswinkel zu finden, unter welchem eine gegebene Höhe in der kürzesten Zeit erstiegen werden kann, zerlege man die Geschwindigkeit v in eine horizontale $= v \operatorname{Cos} I$, und in eine vertikale $= v \operatorname{Sin} I$, so erhält man für letztere

$$v \operatorname{Sin} I = \sqrt{\left(\frac{K-P}{G+R}\right)} \cdot \frac{f \operatorname{Sin} I \sqrt{g}}{\sqrt{h+\sqrt{(h+f \operatorname{Sin} I)}}}$$

Dieſe muß alſo für den geſuchten Winkel am größten ausfallen, oder es muß, wenn man $f \operatorname{Sin} I = z$ ſetzt, $\frac{z}{\sqrt{h+\sqrt{(h+z)}}}$ ein Maximum ſeyn. Daher hat man: $d \cdot \frac{z}{\sqrt{h+\sqrt{(h+z)}}} = 0$, und, wenn man für h einen mittlern Werth annimmt, und dieſen als beſtändig anſieht:

$$[\sqrt{h+\sqrt{(h+z)}}]\,dz - \frac{\frac{1}{2}z\,dz}{\sqrt{(h+z)}} = 0, \text{ oder}$$

$$\sqrt{(h^2+hz)}\,dz = -(h+\tfrac{1}{2}z)\,dz$$

alſo wird $\frac{1}{2}z\,dz = 0$, folglich $dz = 0$.

Nun iſt $z = f \operatorname{Sin} I = 2b \operatorname{Cos} I^2 \operatorname{Sin} I$, oder, wenn man $\operatorname{Sin} I = u$ ſetzt, $z = 2b(u - u^3)$. Man bekommt alſo: $du - 3u^2 du = 0$, und daraus $u = \operatorname{Sin} I = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $I = 35°16'$. Gewöhnlich ſchätzt man dieſen Winkel auf 30°, wobey aber dann zugleich auf eine längere Dauer der Bewegung Rückſicht genommen wird.

§. 142.

Zum Fortſchieben einer Sache dient dem Menſchen der Arm bloß als Werkzeug; die Kraft dazu verſchafft ihm nur allein das Gewicht ſeines Körpers. Er bringt nemlich ſeinen Körper dabey in eine ſchrägé Stellung Fig. 16. HCA, wodurch das Gewicht deſſelben G in eine Kraft nach der Horizontale Cf und in eine nach CA zerfällt.

Man nenne dieſe beyden Kräfte M und N, und den Winkel ACg, den die Lage des Körpers HCA mit der Vertikale Cg macht, $= \varphi$, ſo hat man die beyden Gleichungen (Stat. §. 49.)

$$N \sin \varphi = M \sin FCG = M, \text{ und}$$
$$G \sin \varphi = M \sin ACf = M \cos \varphi.$$

Hieraus wird die Kraft $M = G \tang \varphi$, die zum Fortſchieben des Widerſtandes allein wirkſam iſt, und $N = G \sec \varphi$, die gegen den Unterſtützungspunkt A drückt, und dadurch aufgehoben wird.

Es ſey ferner R der Widerſtand, der dem ausgeſtreckten Arme HE nach der horizontalen Richtung EH entgegenwirkt, ſo iſt zu deſſen Ueberwindung im Schwerpunkte C die Kraft $\frac{R \cdot AH}{AC}$ erforderlich. Setzt man nun das Verhältniß AH : AC wie 5 : 3, ſo erhält man die Gleichung

$$G \tang \varphi = \tfrac{5}{3} R,$$

woraus der Winkel φ beſtimmt wird, unter welchem der Menſch ſeinen Körper inkliniren muß, um den gegebenen Widerſtand aus der Stelle zu ſchieben.

§. 143.

Wenn die Maſſe bereits ins Fortrücken gekommen iſt, ſo hat der Menſch, um den gleichförmigen Gang der Bewegung zu unterhalten, bloß nöthig, ihr in eben der inklinirten Lage, wodurch er ſie Anfangs zum Weichen brachte, beſtändig nachzufolgen. Dabey drückt auf ihn nach der ſchiefen Richtung CA eine Kraft =

G Sec φ, die um G (Sec φ — 1) größer ist, als das bloße Gewicht seines Körpers. Es verhält sich daher diese Art des schrägen Ganges gerade so, als erstiege der Mensch mit einer fremden Last = G (Sec φ — 1) eine Anhöhe, die unter dem Winkel φ gegen die Horizontale geneigt ist; wovon man sich am deutlichsten überzeugen kann, wenn man sich die Richtung CA als vertikal denkt, und damit die Richtung der Kraft G Sec φ, so wie die Lage des Bodens in Vergleichung bringt.

§. 144.

Will man also auf gegenwärtigen Fall die Formel (§. 139.) anwenden, so wird hier $P = G(\text{Sec}\,\varphi - 1)$, $I = \varphi$, und da der Schwerpunkt C stets dieselbe Höhe über den Boden behalten muß, $h = o$, folglich erhält man:

$$v^2 = \left(\frac{K + G - G\,\text{Sec}\,\varphi}{K + G}\right) \cdot \frac{2gb\,\text{Cos}\,\varphi^2}{\text{Sin}\,\varphi}$$

für die Geschwindigkeit, womit der Widerstand $R = \frac{1}{7}G$ tang φ sich fortschieben läßt.

Diese Geschwindigkeit wird offenbar desto geringer, je größer man den Winkel φ, folglich auch den Widerstand R annimmt, oder: was auf der einen Seite der Mensch durch stärkere Inklinirung seines Körpers an Kraft zum Fortschieben gewinnt, das geht ihm auf der andern Seite an Geschwindigkeit verloren. Es giebt also irgend eine Lage für ihn, wobey er von seinem Gewichte den zweckmäßigsten Gebrauch macht, d. h. wofür das Produkt vR ein Maximum ist; diese Voraus-

ſetzung giebt $dv^2R^2 = o$, oder mit Weglaſſung der beſtändigen Faktoren: $d((K+G)\,Sin\,\varphi - G\,tang\,\varphi) = o$; wodurch

$$(K+G)\,Cos\,\varphi^3 = G, \text{ und}$$

$$Cos\,\varphi = \sqrt[3]{\,}\,.\,\frac{G}{K+G} \text{ wird.}$$

Man ſetze $G = 140$ ℔, $K = 60$ ℔, ſo bekommt man $Cos\,\varphi = \sqrt[3]{\frac{7}{10}} = 0{,}8879038$ — $\varphi = 27°23'$, und $R = 84\,tang\,27°23' = 43\frac{1}{2}$ ℔. Dabey iſt alsdann die Geſchwindigkeit $v = 3{,}36$, oder beynahe $\frac{1}{3}$ Fuß.

Von der Kraft der Arme zum Ziehen.

§. 145.

Die Kraft, die der Menſch im Arme beſitzt, etwas zu ſich hin zu ziehen, oder von ſich wegzuſchieben, läßt ſich im Allgemeinen nicht größer, als etwa zu 40 oder höchſtens 60 ℔ annehmen, wiewohl ſie bey ſtarken und geübten Leuten nahe an 100 ℔ betragen kann. Eine größere oder geringere Beugung des Armes bewirkt darin keinen merklichen Unterſchied, ausgenommen, daß er durch eine unbequeme Lage, z. B. wenn man ihn zu weit ausſtreckt, oder dem Leibe zu nahe bringt, an der Ausübung ſeiner völligen Kraft etwas gehindert wird; worauf man aber bey Handmaſchinen, als Kurbeln, Armrädern u. dergl. auch allemal Rückſicht nehmen muß.

§. 146.

Aufgabe. Die Geschwindigkeit v zu bestimmen, womit ein Arbeiter eine gegebene Last P vermittelst eines Armrades aufwinden kann.

Aufl. 1) Durch die Kraft, die der Mensch mit dem Arme anwendet, die Hörner oder Spillen des Rades zu sich hinzuziehen, wird die Last P bey jedem Zuge Anfangs beschleunigt. Wir wollen diese Kraft $= K$ setzen.

2) Ferner sey die Geschwindigkeit der Last während ihrer Beschleunigung für eine bestimmte Zeit $t = u$, so ist die virtuelle Kraft der Bewegung $= \frac{Pdu}{2gdt}$. Diese nach entgegengesetzter Richtung angebracht, also mit P verbunden, giebt eine Kraft $= P\left(1 + \frac{du}{2gdt}\right)$, womit K im Gleichgewichte seyn muß.

3) Nennt man demnach $m : 1$ das Verhältniß der Halbmesser des Rades und der Welle, so bekommt man die Gleichung:

$$mK = P\left(1 + \frac{du}{2gdt}\right).$$

4) Aus dieser wird $du = 2gdt\left(\frac{mK}{P} - 1\right)$, und wenn man der Kürze wegen $\frac{mK}{P} - 1 = p$ setzt:

$$u = 2gpt$$

folglich der Raum, den die Last in der Zeit t zurücklegt:

$$x = gpt^2.$$

5) Gegen das Ende des Zuges hört die Beſchleu-
ung auf, und die Laſt ſteigt alsdann nach, ſich ſelbſt
rlaſſen, zu einer Höhe, die, ihrer zuletzt erhaltenen
ſchwindigkeit u als Fallhöhe zugehört. Dieſe Höhe
$= \frac{u^2}{4g} = gp^2t^2$, und wenn man die Zeit, die dar-
f verfließt, $= t'$ ſetzt, ſo hat man $gt'^2 = gpt^2$, folg-
h $t' = pt$.

6) Beyde Räume x und $\frac{u^2}{4g}$ addirt, geben den
nzen Raum, um den die Laſt bey jedem Zuge fort-
kt $= gpt^2 + gp^2t^2 = gt^2 . p(1+p)$, und dieſen
rch die Summe der beyden Zeiten t und $t' =$
$+p)t$ dividirt, giebt die mittlere Geſchwindigkeit
Laſt $v = gpt$.

7) Die natürliche Weite, die die Hand des Men-
en ährend eines Zuges durchläuft, iſt eine an ſich
timmte Größe, und kann der Länge ſeines Ärmes
ich geſchätzt werden. Man ſetze ſie $= b$, ſo wird
n der Raum (6) auch $= \frac{b}{m}$, folglich

$$\frac{b}{m} = gt^2 . p(1+p).$$

8) Dadurch bekommt man $t = \sqrt{\frac{b}{mgp(1+p)}}$,
wenn man dieſen Werth für t in v ſubſtituirt:

$$v = \sqrt{\frac{bgp}{m(1+p)}}, \text{ oder}$$

$$v^2 = \frac{bgp}{m(1+p)} = \frac{bg}{m} . \left(1 - \frac{P}{mK}\right).$$

§. 147.

1. Für $P = mK$ wird $v = o$; also ist mK die Last, die mit der Stärke des Armes im Gleichgewicht steht. welches auch schon für sich klar ist.

2. Man setze die Geschwindigkeit, womit der Mensch das bloße Seil in die Höhe winden kann, wenn keine Last daran hängt, $= c$, so erhält man für $P = o$, $c^2 = \frac{bg}{m}$. Dies in die Formel substituirt, giebt:

$$v^2 = c^2 \left(1 - \frac{P}{mK}\right).$$

3. Hieraus wird gegenseitig:

$$P = mK \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

§. 148.

Wenn man, wie im §. 134., annimmt, daß der Mensch bey anhaltender Arbeit nur einen Theil W seiner ganzen Armkraft K anwendet, und daß dadurch der Ueberrest $K = W$ in jedem Zeittheilchen dt die Abnahme $= \frac{1}{n} W dt$ leidet, so erhält man für die Dauer der allmähligen Erschöpfung $T = \frac{n(K - W)}{W}$. Die Arbeit kann also desto längere Zeit hindurch fortgesetzt werden, je weniger Kraft darauf verwandt wird; dagegen ist aber dann die Geschwindigkeit $v = c\sqrt{\left(1 - \frac{P}{mW}\right)}$ für eine gegebene Last P desto geringer. Hieraus folgt, daß es irgend einen Werth für W geben

nüſſe, wobey die Wirkung am größten, oder das Produkt Tv ein Maximum iſt, und man darf nur, um dieſes zu finden, d. Tv oder $dT^2v^2 = o$ ſetzen. Subſtituirt man nun für T^2 und v^2 ihre Werthe, ſo wird mit Weglaſſung der beſtändigen Faktoren:

$$d\left[\left(1 - \frac{P}{mW}\right)\frac{(K-W)^2}{W^2}\right] = o.$$

Dies giebt:

$mW(K-W)^2 - 2W(mW-P)(K-W) = 3(mW-P)(K-W)^2$, oder, wenn man mit $K-W$ dividirt

$$mWK - 3mW^2 + 2WP = 3mWK - 3mW^2 - 3PK + 3PW,$$

woraus $W = \frac{3KP}{2mK+P}$ wird.

Man ſetze dieſen Werth für W in v, ſo erhält man:

$$v^2 = \tfrac{1}{3}c^2\left(1 - \frac{P}{mK}\right)$$

für die vortheilhafteſte Geſchwindigkeit, womit eine gegebene Laſt P vermittelſt eines Armrades oder Haſpels aufgewunden werden kann, wenn dabey zugleich auf die längſte Dauer der Bewegung Rückſicht genommen wird.

§. 149.

Der abſolute Werth der Arbeit richtet ſich theils nach der Laſt P, die in Bewegung geſetzt wird, theils nach dem Raume s, durch den ſie fortrücken ſoll, und wächſt mit beyden Größen im einfachen Verhältniſſe, oder iſt dem Produkte Ps proportional. Dies Produkt durch die Zeit t dividirt, die während der Arbeit ver-

fließt, giebt ihren Werth für jede Zeitsekunde $= \frac{Ps}{t} =$ Pv, wonach man den Gewinn, der aus der Arbeit entsteht, zu schätzen hat. Der Mensch benutzt also seine Kraft mit mehr oder weniger Vortheil, je nachdem das Produkt Pv aus der Last in ihre Geschwindigkeit größer oder geringer ist, das man deshalb auch wohl sein mechanisches **Moment** zu nennen pflegt.

§. 150.

Um die Last P zu finden, wofür Pv ein Maximum wird, multiplicire man die für v^2 erhaltene Formel noch durch P^2, und setze das Differenzial von dem Produkt $= o$, so bekommt man $2P - \frac{3P^2}{mK} = o$, und $P = \frac{2}{3}mK$. Für diesen Werth von P wird ferner $v^2 = \frac{1}{9}c^2$, oder $v = \frac{1}{3}c$; also das größte mechanische Moment des Menschen $= \frac{2}{9}mcK = \frac{2}{9}K\sqrt{mbg}$.

Man sieht hieraus, daß ein größeres Rad mehr Vortheil gewährt, als ein kleineres, daß aber die Wirkung nur wie die Quadratwurzel aus der Verhältnißzahl m zunimmt. Indeß ist doch begreiflich, daß die Masse des Rades selbst, die hier nicht in Betracht gezogen ist, in diesem Gesetze einige Aenderung verursachen müsse, wodurch der Vortheil bey einem zu großen Rade wieder aufgehoben, und das Maximum der Wirkung nur auf ein gewisses Verhältniß zwischen Rad und Welle eingeschränkt wird.

Exempel. Es sey $K = 45$ ℔, $b = 2$ Fuß (§. 146. 7.), $m = 4$, so wird das Moment $= 10\sqrt{125}$

111,8 ℔, und, wenn wir Last und Geschwindigkeit f den Umfang des Rades reduciren, die Last $= \frac{2}{3}K$: 30 ℔, die Geschwindigkeit $= \frac{1}{3}cm = \frac{1}{3}\sqrt{mbg}$: 3,73 Fuß.

§. 151.

Aufgabe. Eine gegebene Last P soll durch einen Menschen vermittelst einer Rolle aufgewunden werden; man fragt, mit welcher Geschwindigkeit dies geschehen könne?

Aufl. 1) Der Mensch ergreift bey jedem Zuge das Seil mit ausgestrecktem Arme, hängt sich daran, und läßt dann seinen Körper mit beschleunigter Bewegung herabsinken. Es sey das Gewicht desselben $= G$, die Geschwindigkeit, nachdem die Beschleunigung t Sekunden hindurch gedauert hat, $= u$, der durchlaufene Raum $= x$, so hat man (§. 116.)

$$u = 2gt\left(\frac{G-P}{G+P}\right), \text{ und}$$

$$x = gt^2 . \left(\frac{G-P}{G+P}\right).$$

2) Zu Ende derselben steigt die Last mit der erhaltenen Geschwindigkeit u noch um $\frac{u^2}{4g}$, wozu x addirt, den ganzen Raum giebt, um den die Last bey jedem Zuge fortrückt. Dieser Raum muß so groß seyn, daß ihn der Mensch, wenn er die Arme nach entgegengesetzten Richtungen ausgestreckt hat, mit beyden Händen bequem abreichen kann; man setze ihn $= h$, so wird:

$$h = x + \frac{u^2}{4g},$$

oder, wenn man $\frac{G-P}{G+P} = p$ nennt,

$$h = gt^2 \cdot p(1+p)$$

folglich $t = \sqrt{\frac{h}{gp(1+p)}}$.

3) Die Zeit, während der die Laſt ſich [illegible]bſt i laſſen iſt $= pt$, alſo die Zeit des ganzen Zuge $(1+p)t$. Dieſe in h dividirt, giebt die verlo Geſchwindigkeit.

$$v = gtp = \sqrt{\frac{ghp}{1+p}} = \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}gh\left(1-\frac{P}{G}\right)\right]}$$

§. 152.

1. Hieraus wird die Geſchwindigkeit c, m der Menſch das bloße Seil, wenn keine Laſt d hängt, herabziehen kann, $= \sqrt{\frac{1}{2}gh}$. Setzt man h 4 Fuß, welches der größte Werth iſt, der ſich dafür nehmen läßt, ſo bekommt man $c = 5{,}59$ Fuß.

2. Die Formel erhält alſo wieder dieſelbe Ge wie in den vorhergehenden Fällen, nemlich:

$$v^2 = c^2\left(1-\frac{P}{G}\right)$$

oder gegenſeitig $P = G\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$,

die für das Maximum des Moments Pv, wie vo gezeigt iſt, $P = \frac{2}{3}G = 93\frac{1}{3}$ ℔, und $v = c\sqrt{\frac{2}{3}}$ $3\frac{1}{5}$ Fuß giebt.

3. Eine größere Wirkung kann der Menſch

ese Art durch die Kraft seiner Arme nicht hervorbrin-
n; er kann sie aber dadurch nach Gefallen vermin-
rn, daß er den untern Theil seines Körpers am Bo-
n ruhen, und bloß den obern Theil durch Beugung
r Kniee herabsinken läßt, wodurch nicht allein das
ewicht G, sondern auch der Fallraum h kleiner wird,
s vorhin angenommen ist. Wir wollen G = 60 ℔
nd h = 2 Fuß setzen, so wird für ihn die vortheilhaf-
ste Last P = 40 ℔, und die Geschwindigkeit, womit
sie erhebt, v = 2,28 Fuß.

§. 153.

Wird die Last P durch einen Flaschenzug in die
Höhe gewunden, so hat man für eine Anzahl von n
Rollen in ieder Flasche $p = \frac{2nG - P}{4n^2G + P}$ (§. 121. 3.), also

$$v = \sqrt{\frac{ghp}{1+p}} = \sqrt{\left[\frac{gh}{2n+1} \cdot \left(1 - \frac{P}{2nG}\right)\right]}.$$

Dieser Ausdruck giebt $P = \frac{4}{3}nG$, und $v = \sqrt{\frac{gh}{6n+3}}$,
für die Last und ihre Geschwindigkeit, wobey das Mo-
ment Pv am größten wird.

Vom Zuge der Thiere.

§. 154.

Es sey das Gewicht eines Pferdes, oder irgend eines
andern Lastthieres = G; die größte Last, die man ihm
auflegen darf = K; so wird durch die Summe G + K
die ganze Kraft desselben ausgedrückt, womit es seinen

Körper vertikal in die Höhe heben kann. Man erh
also für seine Geschwindigkeit beym Forttragen ei
Last P, die kleiner als K ist (§. 131.):

$$v = \sqrt{\frac{b^2 g (K - P)}{h (G + K)}},$$

und für seine größte Geschwindigkeit, wenn es mit k
ner fremden Last beladen ist:

$$c = \sqrt{\frac{b^2 g K}{h (G + K)}},$$

wo die Größen b und h in Bezug auf das Thier eb
die Bedeutung haben, in der sie vorhin für den Men
schen genommen wurden. Die Verbindung beyd
Formeln giebt dann ferner:

$$v = c\sqrt{(1 - \frac{P}{K})}.$$

Was den Werth von K betrift, so ist es bekannt, daß
der Körperbau der meisten Thiere zum Tragen weit we
niger als zum Ziehen eingerichtet ist; daher glaube ich
nicht, daß man z. B. für ein Pferd, oder einen Ochsen
K größer, als zu 200 ℔ annehmen dürfe. Das kör
perliche Gewicht dieser beyden Thiere kann im Mittel
= 800 ℔ gesetzt werden.

§. 155.

Um eine Last fortzuziehen, gebraucht das Thier
nur so viel Kraft, als zur Aufhebung des Widerstandes
nöthig ist, den ihm die Last nach der Richtung des Zu
ges entgegensetzt. Die Masse derselben käme nur etwa
bey ihrer anfänglichen Beschleunigung in Betracht,

ren Dauer aber allemal so gering ist, daß man sie billig außer Acht lassen kann.

Man setze nun, es sey auf ebenem und horizontalem Boden der Widerstand der fortrückenden Last = R, ihre Geschwindigkeit, nachdem die Bewegung gleichförmig geworden ist, = u; so muß das Thier, um die Bewegung in dem einmal angenommenen Beharrungszustande zu unterhalten, mit eben der Geschwindigkeit u fortgehen, und zugleich eine Kraft = R nach horizontaler Richtung anwenden. Hierdurch wird ihm begreiflich ein Theil seiner Hebelkraft G + K entzogen, der desto mehr beträgt, je größer die Kraft ist, die auf den horizontalen Zug verwandt wird. Wir wollen ihn W nennen, so entspringt aus der für c gefundenen Formel der gesuchte Werth von u, wenn man darin K — W statt K setzt, und man erhält also:

$$u = \sqrt{\left[\frac{h^2 g}{h} \cdot \frac{K - W}{G + K - W}\right]}$$

oder, wenn man das Quadrat dieses Ausdrucks durch das Quadrat von c dividirt:

$$\frac{u^2}{c^2} = \left(1 - \frac{W}{K}\right) : \left(1 - \frac{W}{G + K}\right).$$

§. 156.

Nach welchem Gesetze der Verlust W, den das Thier an seiner vertikalen Kraft leidet, von dem Widerstande R abhänge, wird sich schwerlich aus seinem Körperbaue mit vollkommener Evidenz herleiten lassen. Am natürlichsten wäre es unstreitig, ihn dem Widerstande

proportional zu ſetzen, wofern die Zeiten, worin die beyden Kräfte R und $G + K - W$ in Ausübung kommen, gleich lange dauerten: aber die erſtere wird während der ganzen Zeit T des Schrittes (§. 131.) angewandt, und die letztere iſt dagegen nur zu Anfange deſſelben die Zeit t hindurch, und zu Ende deſſelben eben ſo lange, alſo zuſammen in einer Zeit $= 2t$ wirkſam; daher verhält ſich die Zeit, worin die Kraft R in Thätigkeit geſetzt wird, zu der, worin ſie der Kraft $G + K$ den Theil W raubt, wie $T : 2t = 1 + p : 1 = 1 + \frac{K + W}{G} : 1$, und es kann folglich nur das Produkt TK zum Produkte $2tW$, oder $(G + K - W) R$ zu GW ein beſtimmtes Verhältniß haben. Dies Verhältniß läßt ſich nun auf folgende Art ſehr leicht beſtimmen:

Es ſey F der größte Widerſtand, den das Thier aus der Stelle zu bringen vermögend iſt, ſo verliert es bey dieſer Anſtrengung alle Kraft, ſeinen Schwerpunkt zu heben; es wird alſo für $R = F$, $W = K$, und man hat daher nach jener Vorausſetzung

$$(G + K - W) R : GW = F : K, \text{ oder}$$
$$FGW = (G + K - W) KR;$$

woraus $W = \frac{(G + K) KR}{FG + KR}$ wird.

Dieſer Werth für W in obiger Formel ſubſtituirt, giebt:

$$1 - \frac{W}{K} = \frac{G(F-R)}{FG+KR}, \text{ und } 1 - \frac{W}{G+K} = \frac{FG}{FG+KR},$$

alſo

also $\frac{u^2}{c^2} = G(F - R) : FG = 1 - \frac{R}{F}$, oder

$$u^2 = c^2 (1 - \frac{R}{F}),$$

eine Formel, wonach die Geschwindigkeit des Thieres für einen gegebenen Widerstand gefunden wird.

§. 157.

Durch Umkehrung dieser Formel erhält man:

$$R = F(1 - \frac{u^2}{c^2})$$

für die Kraft, die das Thier bey einer gegebenen Geschwindigkeit u auf den horizontalen Zug verwenden kann. Hieraus wird, wie wir vorhin gesehen haben, für den Fall, wo das Produkt Ru ein größtes seyn soll, $u = c\sqrt{\frac{1}{3}}$, und $R = \frac{2}{3}F$. Den Werth von F könnte man bestimmen, wenn man das Zugseil des Thieres nach horizontaler Richtung über eine Rolle gehen ließe, und daran so viel Gewicht hängte, als das Thier im Gleichgewichte zu halten im Stande wäre. Für Pferde setzt man gewöhnlich F = 400 ℔, und c = 12 Fuß; dies giebt für ihre vortheilhafteste Geschwindigkeit u = 6,928 Fuß, wobey sie eine Last fortziehen können, die ihnen den Widerstand R = 266 ℔ entgegensetzt.

Siebentes Kapitel.

Vom centralen Stoße der Körper.

§. 158.

Ein Körper, der auf ſeinem Wege mit einem andern zuſammentrift, durch den er gehindert wird, ſeine Bewegung frey fortzuſetzen, übt gegen dieſen ſo lange einen Druck aus, als er ihn vor ſich aus der Stelle zu treiben hat, und bringt dadurch in deſſen Bewegung Aenderungen hervor. Da aber dieſer Druck einen eben ſo großen Gegendruck des andern Körpers auf ihn veranlaßt, ſo leidet hierbey auch ſeine eigene Bewegung von Zeit zu Zeit Aenderungen. Dieſe gegenſeitige Wirkung der beyden Körper auf einander nennt man den Stoß derſelben.

§. 159.

Der Druck, der während des Stoßes zwiſchen den Körpern ſtatt findet, geſchieht zunächſt gegen die Ebene, in der ſie ſich berühren, und zwar nach einer auf ſie ſenkrechten Richtung: denn geſetzt, er hätte irgend eine ſchiefe Richtung gegen dieſelbe, ſo ließe er ſich in einen darauf ſenkrechten, und in einen mit ihr parallelen Theil zerlegen, von denen der erſtere doch nur allein wirkſam ſeyn könnte.

§. 160.

Fig. 17. Wenn die Linie AB, worin die Schwerpunkte

und B der beyden Körper liegen, auf ihrer Berüh-
igsebene KI senkrecht ist, so heißt der Stoß central.
fällt alsdann die mittlere Richtung des Druckes mit
ser Linie zusammen, und geht folglich sowohl durch
i Schwerpunkt des einen als des andern Körpers;
in man zerlege eine jede der Richtungen Aa und Bb,
h denen die Schwerpunkte sich bewegen, in eine auf
Ebene KI senkrechte, AC, BC, und in eine damit
allele, Af, Bg; so gleiten die Körper vermöge der
tern Bewegung neben einander hin, ohne auf einan-
zu wirken, und nur durch die erstere entsteht von
den Seiten her auf die Ebene KI ein senkrechter
uck, der in C seinen Mittelpunkt hat, und folglich
n Punkte A aus nach B, und umgekehrt von B aus
h A gerichtet ist.

§. 161.

Beym centralen Stoße wirken also die Körper ge-
seitig einer auf den Schwerpunkt des andern, und
nn daher ihre Bewegung Anfangs fortrückend ist, so
ibt sie auch während des Stoßes, und nach demsel-
i, noch fortrückend. Dieser Eigenschaft wegen, die
n centralen Stoße ausschließend zukommt, werden
r uns auf dessen Betrachtung im gegenwärtigen Ka-
el allein einschränken, da bisher noch von keiner an-
n Bewegung, als der fortrückenden, gehandelt ist.

§. 126.

Bey Kugeln, die aus gleichartigen Materien beste-
, und ihre Gestalt durch den Stoß nicht weiter ver-

ändern, als daß ſie ſich an der Stelle, wo ſie zuſammentreffen, platt drücken, iſt der Stoß ohne weitere Bedingung allemal central. Ihre Berührungsebene KI iſt nemlich jederzeit ein zu beyden gehöriger Parallelkreis, und ein Perpendikel aus dem Mittelpunkte A der einen Kugel darauf gefällt, geht folglich durch deſſen Mittelpunkt C, alſo verlängert, auch durch den Mittelpunkt B der andern Kugel; mithin ſteht die Linie AB, durch die Mittelpunkte der beyden Kugeln gezogen, auf ihrer gemeinſchaftlichen Berührungsebene ſenkrecht.

§. 163.

Wenn die Linie AB zugleich in die Richtung fällt, die die Schwerpunkte der beyden Körper vor dem Stoße haben, ſo wird dieſe durch den Stoß nicht geändert. Man nennt alsdann den Stoß **gerade**; jeden andern centralen Stoß hingegen nennt man ſchief.

Kugeln z. B., deren Richtungen in die Linie fallen, die durch ihre Mittelpunkte geht, ſtoßen einander allemal gerade, ſo wie auch zwey Cylinder, deren Axen in einer und derſelben geraden Linie liegen, und die ſich nach der Richtung ihrer Axen bewegen.

Vom geraden Stoße.

§. 164.

Wenn zwey unvollkommen harte Körper gegen einander ſtoßen, ſo iſt begreiflich, daß dadurch der Zuſammenhang ihrer Theile leiden müſſe. Was zunächſt von beyden Körpern in Berührung kommt, wird ihrem

gegenseitigen Drucke auszuweichen suchen, und der eine Körper wird folglich so lange in den andern eindringen, bis die Kraft, die er dazu anwendet, dem Widerstande der Cohäsion des andern gleich geworden ist. Hierdurch wird der nachfolgende Körper in seiner Bewegung aufgehalten, und der voraufgehende beschleunigt, so daß beyder Geschwindigkeiten einander immer näher und näher kommen, und folglich zuletzt gleich groß werden müssen.

§. 165.

Sind die beyden Körper unelastisch, d. h., haben sie kein Bestreben, ihre veränderte Form wieder herzustellen, so ist der Stoß vollendet, sobald ihre Geschwindigkeiten einander gleich geworden sind: denn da der Eindruck, den sie in einander hervorgebracht haben, bleibend ist, so kann nun jeder seine Bewegung ungehindert fortsetzen. Beyde Körper bilden jetzt gleichsam Theile eines zusammenhängenden Ganzen, von denen der eine dem andern folgt, ohne durch ihn irgend eine Veränderung seines Zustandes zu erfahren.

§. 166.

Aufgabe. Zwey unelastische Körper, deren Massen M und M' sind, bewegen sich nach einer gemeinschaftlichen Richtung mit den Geschwindigkeiten c und c'. Der erstere, der dem letztern nachfolgt, ereilt ihn vermöge seiner größern Geschwindigkeit, und übt einen geraden Stoß gegen ihn aus; man sucht die Geschwindigkeit beyder zu Ende des Stoßes.

Anst 1) Man setze, nachdem der Stoß eine Zeit t hindurch gedauert hat, sey die Geschwindigkeit der Masse $M = v$, die der Masse $M' = v'$ geworden; der Druck beyder Massen gegen einander sey in diesem Augenblicke $= \Pi$.

2) Da dieser Druck, in sofern ihn der Körper M leidet, gegen die Richtung desselben geschieht, so hat man für die augenblickliche Aenderung seiner Geschwindigkeit

$$dv = -\frac{2g\Pi dt}{M}.$$

3) Beym andern Körper M' hingegen, der eben den Druck nach der Richtung seiner Bewegung auszustehen hat, ist:

$$dv' = \frac{2g\Pi dt}{M'}.$$

4) Beyde Gleichungen verbunden, geben demnach:

$$Mdv = -M'dv', \text{ oder}$$

$Mdv + M'dv' = o$, wovon die Integralgleichung:

$$Mv + M'v' = C \text{ ist.}$$

5) Zu Anfange des Stoßes, oder für $t = o$, war $v = c$, und $v' = c'$; man erhält also $C = Mc + M'c'$, und folglich:

$$Mv + M'v' = Mc + M'c',$$

eine Gleichung, die das Gesetz ausdrückt, nach welchem die Geschwindigkeiten v und v' der beyden Körper während des Stoßes von einander abhänger.

6) Es sey nun für das Ende des Stoßes der Werth von v und v', oder die gemeinschaftliche Ge-

schwindigkeit, die die Körper alsdann bekommen, $= u$; so giebt jene Gleichung, wenn man darin $v = v' = u$ setzt:

$$(M + M')\, u = Mc + M'c',$$

$$\text{also: } u = \frac{Mc + M'c'}{M + M'}.$$

§. 167.

1. Was der Körper M durch den Stoß an Geschwindigkeit verloren hat, beträgt $c - u = \frac{(c - c')M'}{M + M'}$, und was der andere Körper M' durch ihn gewonnen hat: $u - c' = \frac{(c - c')M}{M + M'}$. Es ist also:

$$(c - u) : (u - c') = M' : M, \text{ d. h.}$$

die Aenderungen, die zwey unelastische Körper durch den Stoß in ihren Geschwindigkeiten erleiden, verhalten sich verkehrt, wie ihre Massen.

2. Ist der Körper M' vor dem Stoße in Ruhe, also $c' = 0$, so wird beyder Geschwindigkeit nach dem Stoße: $u = \frac{Mc}{M + M'}$.

3. Wenn die beyden Körper mit ihren Geschwindigkeiten c, c' sich gegen einander bewegen, so nehme man die Richtung, die der eine z. B. M hat, als absolut an; alsdann ist die Geschwindigkeit des andern c' in Bezug auf c negativ, folglich ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit zu Ende des Stoßes $u = \frac{Mc - M'c'}{M + M}$.

Je nachdem also Mc gröſſer oder kleiner als M'c' iſt, erhält x einen poſitiven oder negativen Werth, d. h. die Körper bewegen ſich nach dem Stoße gemeinſchaftlich nach der Richtung desjenigen, bey dem das Produkt aus der Maſſe in die Geſchwindigkeit vor dem Stoße am gröſten war.

§. 168.

Aufgabe. Die Geſchwindigkeiten der beyden Körper M und M' nach dem Stoße zu beſtimmen, wenn ſie vollkommen elaſtiſch ſind, und ſich vor dem Stoße mit den Geſchwindigkeiten c und c' nach einerley Richtung AB bewegen.

Fig. 18. **Aufl.** 1) Es ſey der Abſtand AB ihrer Schwerpunkte A und B zu Anfange des Stoßes $= a$; nach Verlauf einer Zeit t ſey der erſtere um $AP = x$, der letztere um $BQ = x'$ fortgerückt, und beyder Entfernung PQ alsdann $= a - w$, ſo hat man:

$$PQ = AB + BQ - AP, \text{ oder}$$
$$a - w = a + x' - x, \text{ alſo}$$
$$w = x - x'.$$

2) Ferner ſey in dieſem Augenblicke die Geſchwindigkeit des Körpers $M = v$, die von $M' = v'$ geworden, ſo ſind $\frac{Mdv}{2gdt}$ und $\frac{M'dv'}{2gdt}$ die Kräfte, wodurch die Körper nach der gemeinſchaftlichen Richtung AB getrieben werden, oder: es iſt $-\frac{Mdv}{2gdt}$ die Kraft, die auf den Schwerpunkt P des Körpers M nach der Richtung

PA, und $\frac{M'dv'}{2gdt}$ die Kraft, die auf den Schwerpunkt Q des Körpers M' nach der Richtung BQ jetzt wirken muß.

3) Diese Kräfte, nach den entgegengesetzten Richtungen AP und QB auf dieselben Punkte P und Q angebracht, müssen also die Körper in der Lage, worin sie sich jetzt befinden, im Gleichgewichte halten (§. 115.).

4) Die Theile beyder Körper, die zwischen ihren Schwerpunkten P und Q liegen, sind durch deren Annäherung zusammengedrückt, und haben also jeder ein Bestreben bekommen, sich nach beyden Seiten gleich stark auszudehnen. Wir wollen diese Expansivkraft für den Körper $M = \Pi$, für $M' = \Pi'$ setzen, so müssen beyde sowohl unter sich, als mit den äußern Kräften $-\frac{Mdv}{2gdt}$ und $\frac{M'dv'}{2gdt}$ Gleichgewicht hervorbringen; daher bekommt man

$$\Pi = \Pi', \Pi = -\frac{Mdv}{2gdt}, \text{ und } \Pi' = \frac{M'dv'}{2gdt}, \text{ folglich}$$

$$Mdv + M'dv' = 0,$$

wodurch die nemliche Gleichung

$$Mv + M'v' = Mc + M'c'$$

entsteht, wie bey unelastischen Körpern (§. 166. 5.).

5) Die Kraft Π ist nach der bekannten Eigenschaft elastischer Körper von der Zusammenpressung ihrer Theile abhängig, und da diese in gegenwärtigem Falle auf der größern oder geringern Entfernung der Schwerpunkte beyder Körper beruhet, so richtet sie sich nach

dem Werthe von w, und hat alſo für einerley w ein und dieſelbe Größe.

6) Da $v = \frac{dx}{dt}$, und $v' = \frac{dx'}{dt}$, ſo wird (1)

$$\frac{dw}{dt} = v - v'.$$

So lange alſo die Geſchwindigkeit des nachfolgenden Körpers M größer iſt, als die des vorangehenden M; iſt dw poſitiv, mithin w wachſend, d. h. die Schwerpunkte nähern ſich da noch einander.

7) Für $v = v'$ wird $\frac{dw}{dt} = 0$, alſo w ein Maximum, oder: der Abſtand der Schwerpunkte der beyden Körper iſt dann am kleinſten, wenn ihre Geſchwindigkeiten gleich groß geworden ſind.

8) In dieſem Augenblicke leiden alſo die zwiſchen P und Q befindlichen Theile beyderſeits die ſtärkſte Zuſammenpreſſung, und der Druck Π, den ſie gegen einander ausüben, hat folglich jetzt ſeinen größten Werth erreicht. Es kann daher die Wirkung des Stoßes nicht, wie bey unelaſtiſchen Körpern, mit der Gleichheit ihrer Geſchwindigkeiten aufhören; ſie muß nothwendig noch ſo lange fortdauern, bis beyde Körper wieder ihre vorige Geſtalt bekommen haben, oder $w = o$ geworden iſt.

9) Die beyden Gleichungen $Mdv = -2g\Pi dt$, und $M'dv' = 2g\Pi dt$ (4) noch durch $2v$ und $2v'$ multiplicirt, und dann addirt, geben:

$$2Mvdv + 2M'v'dv' = -4g\Pi(v - v')dt = -4g\Pi dw,$$

wovon die Integralgleichung

$$Mv^2 + M'v'^2 = C - 4g\int \Pi dw \text{ iſt.}$$

10) Zu Anfange des Stoßes war $w = o$, $\Pi = o$, mithin auch das Integral $\int \Pi dw = o$, und außerdem $v = c$, $v' = c'$, alſo

$$Mc^2 + M'c'^2 = C.$$

Dies für C in die Gleichung ſubſtituirt, giebt:

$$Mv^2 + M'v'^2 = Mc^2 + M'c'^2 - 4g\int \Pi dw.$$

11) Da nun für einerley w der Werth von Π, folglich auch der des Integrals $\int \Pi dw$ derſelbe iſt, ſo muß für das Ende des Stoßes, wo w wieder $= o$ wird (8), auch $\int \Pi dw$ zum zweyten male verſchwinden. Nennt man daher u und u' die Geſchwindigkeiten der beyden Körper nach vollendetem Stoße, ſo erhält man:

$$Mu^2 + M'u'^2 = Mc^2 + M'c'^2,$$

$$\text{oder } M(c^2 - u^2) + M'(c'^2 - u'^2) = o.$$

12) Außerdem iſt nun auch:

$$Mu + M'u' = Mc + M'c' \quad (4), \text{ oder}$$

$$M(c - u) + M'(c' - u') = o.$$

Dieſe Gleichung noch durch $c + u$ multiplicirt, und dann von der vorhergehenden ſubtrahirt, bleibt:

$$M'(c'^2 - u'^2) - M'(c' - u')(c + u) = o, \text{ woraus}$$

$$c + u = c' + u', \text{ und folglich}$$

$$u' = c - c' + u \text{ wird.}$$

13) Dies für u' in letzterer Gleichung ſubſtituirt, giebt endlich:

$$u = \frac{Mc + M'(2c' - c)}{M + M'} = c - \frac{2M'(c - c')}{M + M'}, \text{ und}$$

$$x = \frac{M'c' + M(2c - c')}{M + M'} = c' - \frac{2M(c - c')}{M + M'}$$

§. 169.

1. Die Geschwindigkeit des Körpers M ist demnach durch den Stoß um $\frac{2M'(c - c')}{M + M}$ vermindert, und die des Körpers M' um $\frac{2M(c - c')}{M + M'}$ gewachsen; also betragen die Aenderungen, die mit den Geschwindigkeiten der beyden Körper während des Stoßes vorgehen, bey elastischen Körpern doppelt so viel, als bey unelastischen (§. 167. 1.).

2. Da $c + x = c' + x'$ (12.), so wird $x' - x = c - c'$. Die Unterschiede zwischen den Geschwindigkeiten zweyer elastischen Körper sind daher vor und nach dem Stoße gleich groß, aber von entgegengesetzter Art; es ist nemlich zu Ende des Stoßes die Geschwindigkeit des vorangehenden Körpers M' größer als die des nachfolgenden M, statt daß sie anfänglich kleiner als jene war.

3) Sind die Massen M und M' einander gleich, so erhält man $x = c'$, und $x' = c$. In diesem Falle tauschen also die Körper beym Stoße ihre Geschwindigkeiten gegeneinander um, oder: der eine bekommt nach dem Stoße eben die Geschwindigkeit, die der andere vor demselben hatte.

4. Wenn sich die beyden Körper M und M' vor dem Stoße mit den Geschwindigkeiten c und c' bege-

n, alſo der letztere M' die entgegengeſetzte Richtung
A hat, ſo iſt ſeine Geſchwindigkeit c' gegen die des
dern c negativ; alſo wird nach dem Stoße

$$x = c - \frac{2M'(c+c')}{M+M'}, \text{ und}$$

$$x' = -c' + \frac{2M(c+c')}{M+M'}.$$

5) Von dieſen Formeln giebt erſtere für x einen
gativen Werth, wofern $M'c' > \frac{1}{2}c(M-M')$, und
ztere für x' einen poſitiven Werth, wofern $Mc > \frac{1}{2}c'$
$M'-M$) iſt; in jenem Falle wird alſo M, in die-
m M' zum Umkehren genöthigt, oder ſeine anfängliche
ichtung durch den Stoß in die entgegengeſetzte ver-
andelt.

§. 170.

§. 19. **Aufgabe.** Ein elaſtiſcher Körper M ſtößt
it der Geſchwindigkeit c in ſenkrechter Richtung GO
gen eine unbewegliche Ebene AB; man ſucht die Ge-
)windigkeit, womit er von ihr zurückprallt.

Aufl 1) Wenn der Körper die Ebene zuerſt be-
hrt, liege ſein Schwerpunkt in G; nach Verlauf ei-
r Zeit t ſey derſelbe um GP = x fortgerückt, und ſeine
eſchwindigkeit alsdann = v.

2) Zu Folge dieſer Geſchwindigkeit muß ihn nach
r Richtung ſeiner Bewegung eine Kraft $= \frac{Mdv}{2gdt}$ be-
leunigen, und wenn man alſo nach eben der Richtung
e Kraft $-\frac{Mdv}{2gdt}$ auf ihn wirken läßt, muß dadurch

der Körper in ſeinem gegenwärtigen Zuſtande im Gleichgewichte gehalten werden.

3) Der Theil von der ganzen Maſſe des Körpers, der Anfangs zwiſchen G und O lag, iſt jetzt in den engern Raum PO zuſammengedrückt, und hat dadurch eine ausdehnende Kraft bekommen, die von ſeiner Verdichtung, oder vom Raume GP = x abhängig iſt.

4) Dieſe Kraft, die wir = Π ſetzen wollen, wirkt nach entgegengeſetzten Seiten ſowohl auf die Ebene AB, als auf den Schwerpunkt des Körpers P. Auf der einen Seite wird ſie durch den Widerſtand der unbeweglichen Ebene aufgehoben, alſo muß auch eben dies auf der andern Seite im Punkte P durch die Kraft $-\frac{Mdv}{2gdt}$ geſchehen; mithin muß $-\frac{Mdv}{2gdt} = \Pi$ ſeyn.

5) Hieraus erhält man $Mdv = -2g\Pi dt$, alſo einen Werth für dv, der beſtändig negativ iſt, welches anzeigt, daß v fortwährend abnehme. Wenn nun $v = o$ geworden iſt, ſo iſt x, wegen der Gleichung $v = \frac{dx}{dt}$, am größten, folglich hat alsdann auch die Kraft Π ihr Maximum erreicht, ſo daß alſo v nothwendig noch ferner abnehmen und ins Negative übergehen muß. Dies dauert ſo lange, bis Π zum zweyten male = o, mithin auch x = o geworden iſt, oder bis der Körper wieder ſeine vorige Geſtalt bekommen hat; womit dann die Wirkung des Stoßes ſich endigt.

6) Die vorige Gleichung (5) noch durch $2v$ multiplicirt, und darin dx für vdt gesetzt, giebt:

$$2Mvdv = -4g\Pi dx,$$

wovon das Integral:

$$Mv^2 = C - 4g\int \Pi dx \text{ ist.}$$

7) Nimmt man nun das Integral $\int \Pi dx$ so, daß es für $x = o$ verschwindet, so wird für den Anfang des Stoßes $Mc^2 = C$, und da für das Ende desselben wieder $x = o$, folglich auch $\int \Pi dx = o$ ist, so erhält man für die Geschwindigkeit u des Körpers nach dem Stoße ebenfalls: $Mu^2 = C$, also $Mu^2 = Mc^2$, und $u = \mp c$.

8) Daß hier nur das obere Zeichen für u gelten könne, ist nicht allein an sich klar, sondern wird auch durch die Betrachtung (5) außer Zweifel gesetzt. Es ist demnach $u = -c$, d. h. der Körper wird mit eben der Geschwindigkeit von der Ebene reflektirt, womit er gegen sie anstieß.

§. 171.

Fig. 20. Wenn der Körper mit der Geschwindigkeit c gegen die Ebene in einer schiefen Richtung FG anstößt, die mit ihr den Winkel $FG\ldots = I$ macht, so läßt sich solche in eine mit ihr parallele nach $Gg = c \operatorname{Cos} I$, und in eine auf sie senkrechte nach $Gr = c \operatorname{Sin} I$ zerlegen. Vermöge der erstern gleitet der Körper ohne Hinderniß an der Ebene fort, und behält also diese Geschwindigkeit ungeändert bey, während die andere $c \operatorname{Sin} I$, womit er gerade gegen die Ebene anstößt, nach und nach vermindert, und zuletzt in die entgegengesetzte $-c \operatorname{Sin} I$

halben Unzen, die zweyte die Tiefe des Eindrucks in Linien, und die dritte das Verhältniß zwiſchen beyden angiebt:

Gewicht P	Tiefe x	Verhältnißzahl x : P
6	2	0,33
7	$2\frac{1}{2}$	0,35
8	$2\frac{1}{2}$	0,32
9	3	0,33
10	$3\frac{1}{2}$	0,35
14	5	0,35
18	6	0,33

In dieſer Tafel kommen die Zahlen der letztern Kolumne offenbar einander ſehr nahe, und ſind überdies abwechſelnd bald etwas größer, bald etwas geringer, ſo daß man wohl kein Bedenken tragen darf, ſie für einerley gelten zu laſſen, oder das Verhältniß x : P als unveränderlich anzunehmen.

§. 174.

Man ſetze nun, ein Prisma, deſſen Grundfläche = B iſt, werde durch ſein Gewicht = G in einen Boden von gegebener Materie bis zur Tiefe = f eingedrückt. Ein anderes Prisma, deſſen Grundfläche = S iſt, ſinke in eben den Boden durch ſein Gewicht P bis zur Tiefe = x. Da ſich der Druck von dem Gewichte des Prisma's auf ſeiner Grundfläche gleichförmig vertheilt, ſo iſt deſſen Einheit bey dem letztern = $\frac{P}{S}$; alſo

Druck, der auf einen Theil ſeiner Grundfläche = B

imt, = $\frac{PB}{S}$, mithin:

$$f : G = x : \frac{PB}{S}, \text{ oder}$$

$$f : x = \frac{G}{B} : \frac{P}{S}.$$

. h. die Tiefen der Eindrücke, die zwey Pris-
:n mit ungleichen Grundflächen in einerley
oden machen, wenn ſie von deſſen Oberfläche
s der Ruhe herabſinken, verhalten ſich direkt,
ie ihre Gewichte, und verkehrt, wie ihre
rundflächen.

Auch hiermit ſtimmten andere von Lambert an-
ſtellte Verſuche ebenfalls vollkommen überein; er fand
mlich bey einerley Gewicht die Tiefen der Eindrücke
i umgekehrten Verhältniſſe der Grundflächen, woraus
h obige Proportion für verſchiedene Gewichte und
rundflächen von ſelbſt ergiebt.

§. 175.

Die Haltbarkeit eines Bodens läßt ſich am rich-
ıſten darnach beurtheilen, in welcher Tiefe ein Prisma
ın beſtimmtem Gewichte und gegebener Grundfläche
ın ihm im Gleichgewichte gehalten wird. Dieſe Tiefe
t zwar nicht mit der eben betrachteten, zu der das
risma gelangt, wenn es von der Oberfläche des Bo-
ns herabſinkt, einerley, weil daſſelbe bey jeder Bewe-
ıng, ſie ſey noch ſo gering, nothwendig weiter in den

Boden eindringen muß, als das Gleichgewicht es erfordert; indeß wird doch gewiß erstere der letztern proportional seyn, und also auch eben so vom Gewichte und der Grundfläche des Prisma's, wie jene, abhängen.

§. 176.

Aufgabe. Ein prismatischer Körper, dessen Masse $= M$ ist, sinkt in einen Boden von der Oberfläche desselben mit einer Geschwindigkeit, die der Fallhöhe H zugehört, vertikal herab. Der Boden ist von solcher Beschaffenheit, daß er dem Prisma das Gleichgewicht hält, wenn es in ihn bis zur Tiefe b eingesenkt wird; man sucht die Bewegung des Prisma's, und die größte Tiefe, zu der es gelangt.

Aufl. 1) Nachdem es bis zur Tiefe x gesunken ist, sey die Höhe, der seine Geschwindigkeit zugehört, $= h$; die Kraft, wodurch es getrieben wird, $= P$; so hat man:

$$M\ddot{u}h = Pdx \text{ (§. 51.)}.$$

2) Die Kräfte, die auf das Prisma eigentlich wirken, sind: das Gewicht desselben M, und der Widerstand, den ihm der Boden entgegensetzt. Wird also zu diesen noch die Kraft P nach vertikal aufwärts gehender Richtung hinzugefügt, so muß sie sich mit ihnen aufheben, oder dasselbe Prisma muß bey dem Gewichte $M = P$ an der Stelle, wo es sich gegenwärtig befindet, mit dem Boden im Gleichgewichte seyn.

3) Dem zufolge ist

$$M - P : M = x : b,$$

also $M - P = \frac{Mx}{b}$, und $P = M\left(1 - \frac{x}{b}\right)$.

4) Dieſen Werth für P in obiger Gleichung (1) ſubſtituirt, giebt:

$$dh = \left(1 - \frac{x}{b}\right) dx,$$

und davon das Integral genommen:

$$h = C + x - \frac{x^2}{2b}.$$

5) Nun war an der Oberfläche des Bodens, oder für $x = o$, $h = H$; alſo wird $C = H$, und folglich

$$h = H + x - \frac{x^2}{2b}.$$

6) Die größte Tiefe, die wir p nennen wollen, erreicht das Prisma, nachdem es alle Bewegung verloren hat; es iſt alſo für $x = p$, $h = o$, mithin

$$o = H + p - \frac{p^2}{2b}, \text{ woraus}$$

$$p = b + \sqrt{(b^2 + 2bH)} \text{ wird.}$$

§. 177.

Für $H = o$ giebt dieſe Formel $p = 2b$. Wenn alſo das Prisma in den Boden von der Oberfläche deſſelben aus der Ruhe einſinkt, ſo gelangt es zu einer doppelt ſo großen Tiefe, als diejenige iſt, worin ihm der Boden das Gleichgewicht hält. Dieſer Satz dient zur Beſtätigung deſſen, was §. 175. ſchon zum Voraus angenommen wurde, und gewährt zugleich ein ſehr einfaches Mittel, den Werth von b durch Verſuche zu finden.

Da aber der Eindruck, den das Prisma in den Boden macht, wenn es auf seine Oberfläche gestellt wird, meistens nur gering ist, so erhält man hierdurch den Werth von b nicht genau genug. Es ist daher zu dieser Absicht vortheilhafter, das Prisma von irgend einer Höhe auf den Boden herabfallen zu lassen: denn da alsdann seine Geschwindigkeit an der Oberfläche desselben dieser Höhe zugehört, so wird aus der Gleichung (6)

$$b = \frac{p^2}{2(H+b)},$$

wovon Zähler und Nenner desto beträchtlicher sind, je größer man die Fallhöhe H angenommen hat.

Lambert ließ das vorhin erwähnte Parallelepipedum von mehreren verschiedenen Höhen in den Sand herabfallen, und fand die Tiefen der Eindrücke für

H =	0	12	24	36	48	60	72	144 Lin.
p =	0,6	2,5	3,6	4,5	5,3	6,0	6,5	9,0 Lin.

woraus für b folgende Werthe entspringen:

b =	0,3	0,21	0,24	0,25	0,26	0,27	0,27	0,26 Lin.

Von diesen stimmen die letztern, wie man sieht, sehr genau überein, und es ist also wohl keinem Zweifel unterworfen, daß die Abweichungen zwischen den vier erstern bloß den unvermeidlichen Fehlern der Beobachtung zuzuschreiben sind.

Noch mehr überzeugt man sich hiervon durch folgende seiner Versuche, bey denen dasselbe Parallelepi-

pebum zwar in etwas dichteren Sand, aber von ungleich größern Höhen, als vorhin, herabfiel. Es war nemlich

für H =	144	288	432	576	720‴
p =	7	10	12	14	$15\frac{1}{2}$‴

Dies giebt für b nachstehende Werthe:

b = 0,162 | 0,167 | 0,162 | 0,166 | 0,163‴,

die so genau zusammentreffen, als es sich bey Rechnungen dieser Art nur irgend erwarten läßt. Ein Mittel zwischen ihnen genommen ist b = 0,164; bedient man sich dessen in der oben für p gefundenen Formel, so erhält man:

für H =	144	288	432	576	720‴
p =	7,04	9,88	12,06	13,91	15,53‴

Von diesen berechneten Tiefen weichen die beobachteten insgesammt nicht mehr, als in einigen Hunderttheilen von Linien ab.

§. 178.

Aufgabe. Die Tiefe p zu finden, zu der das Prisma in den Boden einsinkt, wenn es in irgend einer Tiefe x eine Geschwindigkeit hat, die der Höhe h zugehört.

Aufl. 1) Man nenne H die Höhe, der seine Geschwindigkeit an der Oberfläche des Bodens zugehören muß, wenn es die Tiefe x mit der gegebenen Geschwindigkeit erreichen soll, so erhält man folgende Gleichungen (§. 173. 5. 6.)

$$h = H + x - \frac{x^2}{2b}, \text{ und}$$

$$o = H + p + \frac{p^2}{2b}.$$

2) Von diesen giebt erstere:

$$2bH = x^2 - 2bx + 2bh;$$

letztere: $2bH = p^2 - 2bp$; woraus

$$p^2 - 2bp = x^2 - 2bx + 2bh,$$

und $p = b + \sqrt{[(x-b)^2 + 2bh]}$ folgt.

§. 179.

Die zur Höhe h gehörige Geschwindigkeit würde das Prisma in der Tiefe x des Bogens bekommen, wenn es von der Höhe $H = \frac{x^2}{2b} - x + h$ herabfiele; sie kann ihm aber auch auf jede andere Art, z. B. durch den Stoß oder Schlag mitgetheit werden.

Wir wollen setzen, das Prisma sey Anfangs zu seiner natürlichen Tiefe, wo ihm der Boden das Gleichgewicht hält, herabgesunken, und werde nun durch successive Schläge, wovon ihm jeder eine der Höhe h zugehörige Geschwindigkeit ertheilen mag, nach und nach in denselben weiter eingetrieben, so ist die Tiefe, zu der es gelangt, nach dem ersten Schlage $p' = b + \sqrt{2bh}$, nach dem zweyten $p'' = b + \sqrt{4bh}$, nach dem dritten $p''' = b + \sqrt{6bh}$, und überhaupt, nach dem nten Schlage: $p^{(n)} = b + \sqrt{2nbh}$. Also verhält sich der Raum, um den das Prisma durch wiederhohlte, gleich starke Schläge unter die Tiefe des Gleichgewich-

:s b einſinkt, wie die Quadratwurzel aus der Anzahl er Schläge.

§. 180.

Die Gleichheit der Schläge wird dadurch bewirkt, aß man einerley Gewicht von gleichen Höhen auf das Prisma herabfallen läßt. Es ſey nemlich dies Gewicht = P, die Höhe, von der es herabfällt, = H, ſo iſt ie Geſchwindigkeit, womit es das Prisma erreicht, ieſer Höhe zugehörig, alſo = $2\sqrt{gH}$, folglich die em Prisma mitgetheilte Geſchwindigkeit (§. 167. 2.) = $\frac{2P\sqrt{gH}}{P+M}$, wenn deſſen Maſſe, wie vorhin, = M eſetzt wird. Die dazu gehörige Höhe h iſt = $H\left(\frac{P}{P+M}\right)^2$; alſo für einerley P und H ſtets dieſelbe.

Da das Gewicht auf dem Prisma während des inſinkens liegen bleibt, ſo muß man für b den Werth ehmen, der der ganzen Maſſe P + M entſpricht. ambert bediente ſich zu ſeinen Verſuchen eines Ham- ers; er ließ ihn zuerſt mit dem Parallellepipedum n der Oberfläche des Sandes herab ſinken, und fand e Tiefe des Eindrucks 4‴; alſo war b = 2‴. Jetzt nkte er das Parallellepipedum von neuem um 2‴ in n Boden ein, und ließ den Hammer zu wiederholten alen von 3 Zoll Höhe darauf herabfallen. Die Wir- ngen davon, und ihre Vergleichung mit der Theorie, thält folgende Tafel:

Arbeiter vermittelst einer Rolle aufgewunden; es fragt sich also, wie das Verhältniß seiner Masse zu der des Pfeilers gewählt werden müsse, damit durch einerley Aufwand von Zeit und Kraft am meisten bey der Sache ausgerichtet werde. Um dies zu finden, nenne man T die Zeit, die während des Aufwindens verfließt, S die gesammte Kraft, die alle Arbeiter zugleich anwenden, n die Anzahl derselben;

1) so kommt auf jeden Einzelnen von der ganzen Last des Fallblocks P der Theil $\frac{1}{n}$P, und man hat daher für die Geschwindigkeit, womit derselbe gehoben wird:

$$u = c\sqrt{(1 - \frac{P}{nG})}$$ (§. 152. 2.)

oder, da nG = S ist,

$$v = c\sqrt{(1 - \frac{P}{S})}, \text{ mithin:}$$

$$H = vT = cT\sqrt{(1 - \frac{P}{S})}.$$

2) Die Kosten der Arbeit sind theils der Zeit T, theils der Anzahl der Menschen proportional, und stehen also mit dem Produkte nT in einem bestimmten Verhältnisse. Wofern sie demnach ungeändert bleiben sollen, so muß nT, oder nGT d. i. ST eine beständige Größe seyn. Man setze diese = A, so wird $T = \frac{A}{S}$, folglich:

$$H = \frac{cA}{S}\sqrt{(1 - \frac{P}{S})} = cA\sqrt{(\frac{S - P}{S^2})}.$$

3) Dies für H in der für p erhaltenen Formel substituirt, giebt:

$$p = b + \sqrt{[(f-b)^2 + 2\lambda bcA\,(\frac{P}{P+M})^2 \cdot \sqrt{(\frac{S-P}{S^3})}]},$$

worin die Größen S und P nun so bestimmt werden müssen, daß dadurch p ein Maximum wird.

4) Da b, f, λ, c und A unveränderlich sind, so darf man nur die Werthe von S und P suchen, wofür der Ausdruck $(\frac{P}{P+M})^2 \cdot \sqrt{(\frac{S-P}{S^3})}$ sein Maximum erreicht.

5) Man sehe zuvörderst P als schon bestimmt, oder bloß S als unveränderlich an, so wird diesem zufolge: $d.(\frac{S-P}{S^3}) = o$, also $\frac{1}{S^3} = \frac{3(S-P)}{S^4}$, und $S = \frac{3}{2}P$.

6) Dadurch verwandelt sich obiger Ausdruck in $\frac{P\sqrt{12}}{(P+M)^2}$, wovon das Differenzial nach P genommen, und $= o$ gesetzt, die Gleichung

$$\frac{1}{(P+M)^2} = \frac{2P}{(P+M)^3}$$ giebt, aus welcher:

$P = M$ wird, d. h.

es ist zum Einrammen eines Pfeilers am vortheilhaftesten, einen Fallblock zu nehmen, der mit dem Pfeiler einerley Gewicht hat, wie auch Lambert unter einer andern, weniger evidenten Voraussetzung gefunden hat.

7) Ferner bekommt man $S = \frac{1}{2} M$, alſo $n = \frac{S}{G} = -\frac{3M}{2G}$, für die angemeſſenſte Zahl der Arbeiter, wobey jeder Einzelne eine Kraft $= \frac{2}{3} G = 40$ ℔ (§. 152. 3.) anzuwenden hat, welches auch mit Herrn Bugge's Annahme zuſammentrifft. S. phil. tranſact. 1779. Vol. 69. P. I. pag. 124.

§. 183.

Die Vorausſetzung, daß $P = M$ genommen werde, giebt:

$$p = b + \sqrt{[(f-b)^2 + \tfrac{1}{2}\lambda b H]},$$

wo b die Tiefe bedeutet, zu der der Pfeiler von der Oberfläche des Bodens durch ſein eigenes Gewicht M herabſinkt (§. 180 und §. 177.). Es iſt daher jedesmal vor dem erſten Schlage $f = b$; alſo nach demſelben $p = b + \sqrt{\frac{1}{2}\lambda b H}$, und wenn man die Tiefen des Pfeilers nach dem zweyten, dritten Schlage u. ſ. w. p', p'' u. ſ. w. nennt, ſo wird ferner:

$$p' = b + (p-b)\sqrt{(2 + \frac{p}{H})}$$

$$p'' = b + (p-b)\sqrt{(3 + \frac{p+p'}{H})}, \text{ u. ſ. w.}$$

weil bey jedem neuen Schlage der Fallblock auf den Pfeiler um ſo viel höher herabfällt, als letzterer bereits in den Boden eingeſunken iſt.

§. 184.

Aufgabe. Der Pfeiler ſey in den Boden bis zu einer Tiefe f eingeſchlagen, und werde nun mit einer Laſt

O beſchwert; man ſucht, wie tief er dadurch noch ferner einſinken werde?

Aufl. 1) Es ſey, wie vorhin, b die Tiefe, zu der der Pfeiler von der Oberfläche des Bodens durch ſein eigenes Gewicht M herabſinkt; eben dies bedeute B für das Gewicht M + O; ſo iſt zuvörderſt

$$b : B = M : M + O$$

$$\text{alſo } B = \left(\frac{M + O}{M}\right) b.$$

2) Ferner ſey während des Einſinkens für irgend eine Tiefe x die Höhe, der ſeine Geſchwindigkeit zugehört, = h, ſo hat man (§. 176. 4.)

$$b = C + x - \frac{x^2}{B},$$

weil das dortige b die Tiefe bezeichnet, worin die Laſt M + O vom Boden im Gleichgewichte gehalten wird, und folglich halb ſo groß als B iſt.

3) Nun iſt anfänglich x = f, und h = o; alſo wird $C = \frac{f^2}{B} - f$, mithin

$$h = x - f - \left(\frac{x^2 - f^2}{B}\right).$$

4) Es heiße p die geſuchte Tiefe, bey der der Pfeiler zu ſinken aufhört, ſo iſt für x = p zum zweytenmale h = o, folglich

$$B(p - f) = p^2 - f^2,$$

woraus man $p = B - f$ erhält.

5) Hierin für B ſeinen obigen Werth ſubſtituirt, giebt:

$$p = \frac{(M + O)\, b - Mf}{M}.$$

§. 185.

1) Begreiflich gilt dieſe Formel nur unter der Vorausſetzung, daß $2f < b$, oder $O > (\frac{2f}{b} - 1) M$ ſey. Widrigenfalls gäbe ſie nemlich für p einen kleinern Werth als f, der aber weiter nichts anzeigt, als daß der Pfeiler ſchon ſo tief im Boden ſteckt, daß ihn die Laſt O nicht ferner mehr einzutreiben vermag, wenn ſie ihm bloß aufgelegt wird, und nicht von einer Höhe auf ihn herabfällt. In allen den Fällen alſo, wo $O < (\frac{2f}{b} - 1) M$, iſt $p = f$, oder der Pfeiler iſt vor dem fernern Einſinken geſichert.

2) Um die Tiefe f zu finden, zu der der Pfeiler wenigſtens eingeſchlagen werden mußte, damit man ihm eine gegebene Laſt O ohne die Gefahr, daß er durch ſie weiter einſinke, zu tragen geben könne, darf man nur $p = f$ ſetzen. Dies giebt:

$$Mf = (M + O) b - Mf, \text{ woraus}$$
$$f = \frac{(M + O) b}{2M} \text{ wird.}$$

Vom Einſinken pyramidaliſcher und anderer Körper.

§. 186.

Fig. 21. **Aufgabe.** Die Tiefe zu finden, zu welcher eine gegebene Pyramide, deren Gewicht $= M$ iſt, in einen Boden von beſtimmter Beſchaffenheit eingeſenkt werden muß, damit ſie von ihm getragen werde.

Aufl.

Aufl. 1) Es sey die Höhe der Pyramide CD = h, re Grundfläche AB = B, die gesuchte Tiefe CO ihrer pitze C unter der Oberfläche des Bodens HOI = p, i unbestimmter Theil derselben CP = z, der durch P hende Querschnitt MN = S, so ist zuvörderst B : S : $h^2 : z^2$, also

$$S = \frac{Bz^2}{h^2}.$$

2) Man setze nun, ein Prisma, dessen Grundfläche : c^2, Gewicht = G ist, werde vom Boden in einer efe = f getragen; für ein anderes Prisma seyen eben se Größen der Reihe nach w^2, P, u; so hatten r (§. 174.):

$$f : u = \frac{G}{c^2} : \frac{P}{w^2}, \text{ oder}$$

$$c^2 f : w^2 u = G : P \text{ . d. i.}$$

: vertikale Widerstand des Bodens verhält sich wie s Produkt aus dem horizontalen Flächenstücke desse- i, das die Last unterstützt, in dessen Tiefe unter der berfläche.

3) Hiernach leidet also das Pyramidenstück zwi- en den beyden unendlich nahen Querschnitten MN d mn, da es von einem Erdringe = dS in einer efe PO = p − z getragen wird, den vertikalen Wi- stand

$$d\Pi = \frac{G(p-z)\,dS}{c^2 f} = \frac{2GB(p-z)\,z\,dz}{c^2 h^2 f},$$

von das Integral $\Pi = \frac{GB}{c^2 h^2 f} \cdot (pz^2 - \frac{1}{3}z^3)$ ist.

4) Darin $z = p$ gesetzt, giebt den gesammten vertikalen Widerstand des Bodens gegen die Pyramide $= \frac{GBp^3}{2c\,h\,f}$. Weil nun dieser ihr Gewicht M aufheben muß, wofern sie nicht tiefer einsinken soll, so erhält man

$$M = \frac{GBp^3}{3c^2h^2f}, \text{ folglich}$$

$$p = \sqrt[3]{\left[\frac{3Mc^2h^2f}{GB}\right]}.$$

§. 187.

Es sey für das Gewicht G eben derselben Pyramide $p = b$, so wird:

$$b = \sqrt[3]{\left(\frac{3c^2h^2f}{B}\right)}, \text{ also}$$

$$p = b\left(\frac{M}{G}\right)^{\frac{1}{3}}, \text{ oder}$$

$$b : p = G^{\frac{1}{3}} : M^{\frac{1}{3}}, \text{ d. i.}$$

die Tiefe, worin eine Pyramide von gegebener Form vom Boden im Gleichgewichte gehalten wird, verhält sich, wie die Kubikwurzel aus ihrem Gewichte.

§. 188.

Aufgabe. Wenn die Pyramide mit ihrer Spitze die Oberfläche des Bodens berührt, gehöre ihre Geschwindigkeit der Höhe H zu. Ihr Gewicht sey $= G$; die Tiefe, in der sie vom Boden getragen wird, $= b$; man sucht, wie tief sie in denselben eindringen werde.

Aufl. 1) Man setze die Kraft, wodurch sie getrieben wird, wenn sie bereits zu einer Tiefe x gelangt

$= P$; die Höhe, der ihre Geschwindigkeit an die Stelle zugehört, $= h$; so hat man:

$$G dh = P dx.$$

2) Wird nun die Kraft P gegen die Richtung der wegung auf ihren Schwerpunkt angebracht, so muß schen den dreyen Kräften G, P und dem Widerstande Bodens Gleichgewicht entstehen, d. h. die Pyramide ß bey dem Gewichte $G = P$ in der Tiefe x von dem den getragen werden; es wird daher:

$$b : x = G^{\frac{1}{3}} : (G - P)^{\frac{1}{3}},$$

oder $G - P = \frac{Gx^3}{b^3}$, woraus man

$$P = G\left(1 - \frac{x^3}{b^3}\right) \text{ erhält.}$$

3) Dies in obiger Gleichung für P substituirt, giebt:

$$dh = \left(1 - \frac{x^3}{b^3}\right) dx$$

$$\text{also } h = C + x - \frac{x^4}{4b^3}.$$

4) Zu Anfange war $x = o$, und $h = H$, also ch $C = H$, mithin:

$$h = H + x - \frac{x^4}{4b^3}.$$

5) Es sey endlich p die größte Tiefe des Einsin ks, so ist für $x = p$, $h = o$; daher bekommt man diese folgende Gleichung:

$$p^4 - 4b^3p = 4b^3H.$$

6) Fällt die Pyramide von der Oberfläche des

Bodens aus der Ruhe herab, so ist $H = o$, also $p = b\sqrt[3]{4} = 1{,}5874\,b$.

§. 189.

Wir wollen setzen, der pyramidenförmige Keil befinde sich Anfangs schon in einer Tiefe des Bodens $= f$, und bekomme nun daselbst eine der Höhe H zugehörige Geschwindigkeit; so ist in der allgemeinen Gleichung (3):

$$h = C + x - \frac{x^4}{4b^3},$$

für $x = f$, $h = H$, folglich:

$$H = C + f - \frac{f^4}{4b^3}, \text{ oder}$$

$$C = H - f + \frac{f^4}{4b^3}.$$

Dies für C substituirt, giebt:

$$4b^3h = f^4 + 4b^3(H - f) + 4b^3x - x^4.$$

Heißt nun, wie vorhin, p die Tiefe, zu der die Spitze des Keiles nach dem gänzlichen Verluste seiner Bewegung gelangt, so erhält man für diese die Gleichung:

$$p^4 - 4b^3p = f^4 + 4b^3(H - f).$$

§. 190.

Die der Höhe H zugehörige Geschwindigkeit kann dem Keile in jeder Tiefe durch den Stoß mitgetheilt werden, indem man auf seinen Rücken ein Gewicht von einer beliebigen Höhe herabfallen läßt; also lassen sich bey ihm, eben so wie beym Prisma, die Tiefen bestimmen, zu denen derselbe durch mehrere aufeinander fol-

gende gleich ſtarke Schläge nach und nach einſinken muß.

Es ſey vor dem erſten Schlage $f = b\sqrt[3]{4}$, oder das Gewicht ſey ihm Anfangs bloß aufgelegt, und mit ihm von der Oberfläche des Bodens herabgeſunken, ſo wird nach demſelben: $p^4 - f^3p = f^3H$. Hieraus erhält man für ſeine Tiefe $p^{(2)}$ nach dem zweyten Schlage:

$$p^{(2)4} - f^3p^{(2)} = p^4 + f^3(H - p) = 2f^3H;$$

nach dem dritten

$$p^{(3)} - f^3p^{(3)} = p^{(2)4} + f^3(H - p^{(2)}) = 3f^3H;$$

und allgemein, für ſeine Tiefe $p^{(n)}$ nach dem nten Schlage:

$$p^{(n)4} - f^3p^{(n)} = nf^3H = n(p^4 - f^3p).$$

Hat man alſo die Tiefe des Keiles p, zu der ihn der erſte Schlag eintreibt, gemeſſen, ſo kann man daraus leicht die folgenden Tiefen durch Auflöſung der biquadratiſchen Gleichung herleiten.

Zur Erläuterung dieſer Formel, und zugleich zum Beweiſe für die Richtigkeit derſelben mögen folgende von Lambert angeſtellte Verſuche dienen:

Er ließ eine Pyramide aus Holz von 2 Zoll Höhe, und einer rechtwinklichten Baſis von 7‴ Länge und $4\frac{5}{7}$‴ Breite verfertigen. Sie wurde mit dem vorigen Hammer beſchwert, und ſank damit in den Sand bis zu einer Tiefe von $8\frac{1}{2}$‴ herab. Das Eindringen nach dem erſten Schlage betrug ferner $4\frac{1}{2}$‴; alſo war $f = 8\frac{1}{2}$, $p = 13$, $p^4 - f^3p = 20577\frac{3}{8}$, welches für die Tiefe $p^{(n)}$ nach dem nten Schlage folgende Gleichung giebt:

$$p^{(n)4} - 614\frac{1}{8}p^{(n)} = 20577\frac{3}{8} \cdot n.$$

in eben der Bedeutung, wie im §. 176.; so hat man nach vorhergehendem Satze (4) die Proportion:

$$p : x = M^{\frac{1}{2}} : (M - P)^{\frac{1}{2}},$$

woraus $P = M\left[1 - \left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$ folgt.

Dies für P in die Gleichung $Mdh = Pdx$ gesetzt, giebt

$$dh = \left[1 - \left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{2}}\right] dx,$$

$$\text{also } h = x - \tfrac{2}{5}\sqrt{\left(\frac{x^5}{p^3}\right)},$$

wozu hier keine Konstante addirt wird, weil für $x = o$, auch $h = o$ seyn soll. Nennt man nun die gesuchte größte Tiefe das Einsinken $= g$, so ist für $x = q$, zum zweytenmale $h = o$; also erhält man dafür die Gleichung:

$$o = q - \tfrac{2}{5}\sqrt{\left(\frac{q^5}{p^3}\right)},$$

mithin $q = p\sqrt[3]{\frac{25}{4}}$, oder $= \sqrt[3]{\left(\frac{225M^2c^6f^2}{128Gb^2a}\right)}$.

§. 193.

Man setze, der Cylinder werde in dieser eingesenkten Lage, die er durch sein eigenes Gewicht M bekommen hat, nach horizontaler Richtung, oder parallel mit der Oberfläche des Bodens EF fortgezogen, so ist klar

1) daß seine Tiefe in demselben unverändert dieselbe, also stets $= q$ bleiben müsse, weil diese allein von seinem Gewichte abhängt, das aber durch den gedachten Zug weder vermehrt noch vermindert wird;

2) daß, wenn seine Bewegung bereits gleichför-

mig geworden ist, zur Unterhaltung derselben nicht mehr Kraft erfordert werde, als zur Ueberwindung des Widerstandes nöthig ist, den ihm der Boden nach der horizontalen Richtung entgegen setzt.

Um nun diesen Widerstand, den wir R nennen wollen, in Rechnung zu bringen, nehme man in §. 191. BD = q, und zerlege den vertikalen Druck dΠ = $\frac{Gb\,(2aq - y^2)\,dy}{2ac^2f}$, der auf das Element Mm kommt, in einen längs dem Halbmesser MC = dΠ Cos BCM = dΠ $(1 - \frac{x}{a})$, und in einen darauf senkrechten nach der Tangente an M = dΠ Sin BCM.

Ersterer, der hier nur allein wirksam ist, geht durch C, den Schwerpunkt des Cylinders nach der Richtung Cw, und zerfällt noch daselbst in einen Theil nach der Vertikale Cv, und in einen nach der Horizontale Cu. Letzterer ist

$$dR = d\Pi\,(1 - \frac{x}{a})\,\text{Sin vCw} = d\Pi\,(1 - \frac{x}{a}).\,\frac{y}{a}$$

$$= \frac{Gb}{2a^2c^2f}\,(2aqy - y^3)\,(1 - \frac{y^2}{2a^2})\,dy,$$

wovon das Integral

$$R = \frac{Gb}{2a^2c^2f}\,[aqy^2 - \tfrac{1}{4}y^4\,(1 + \frac{q}{a}) + \frac{y^6}{12a^2}]$$ ist.

Hierin x = q, oder $y^2 = 2aq$ gesetzt, giebt endlich den zesammten horizontalen Widerstand, den der Cylinder beym Fortrollen leidet:

$$K = \frac{Gb}{2a^2c^2f}(a^2q^4 - \tfrac{2}{3}aq^3) = \frac{Gbq^3}{2ac^2f}(a - \tfrac{2}{3}q)$$

oder, wenn man den beständigen Faktor $\frac{G}{c^2f} = \lambda$ nennt,

$$R = \frac{\lambda bq^3}{2a}(a - \tfrac{2}{3}q), \text{ worin}$$

$$q = \sqrt[3]{\left(\frac{225M^2}{128\lambda^2b^2a}\right)} \text{ ist (§. 192.).}$$

Da in den meisten Fällen $\frac{2}{3}q$ gegen a nur gering ist, so folgt, daß sich der Widerstand beynahe wie bq^3, d. i. direkt wie $M^{\frac{2}{3}}$, und verkehrt wie $\sqrt[3]{a^2b}$ verhalte.

§. 194.

Man sieht ohne mein Erinnern leicht, daß sich hiervon eine Anwendung auf die Berechnung des Widerstandes machen lasse, der bey Fuhrwerken jeder Art überwunden werden muß, sobald das Rad in den Boden einsinkt.

Ein anderes Verfahren, dieses Hinderniß zu bestimmen, dessen sich Herr Prof. Fuß in seiner Abhandlung über das Fuhrwesen *) bedient, gründet sich darauf, daß man die Erde als eine vollkommen flüßige Substanz ansehen könne, was sich doch aber gewiß nur beyläufig, in Ermangelung sicherer Voraussetzungen annehmen läßt. Da in seiner Formel Winkel vorkommen, die vorher erst besonders berechnet werden müssen, so kann ich nicht allgemein angeben, in wie fern sie von

*) Versuch einer Theorie des Widerstandes zwey und vierrädriger Fuhrwerke auf Fahrwegen jeder Art. Kopenhagen 1798.

er meinigen abweicht; ich ſchränke mich daher bloß auf olgendes von ihm gegebene Exempel ein:

In feuchtem grobkörnigen Sande trat eine eiſerne Stange von 5 ℔ Gewicht, und 1 Quadratzoll Baſis n einer Tiefe von $\frac{5}{12}$ Zoll mit demſelben ins Gleichge- oicht; dies giebt alſo $\lambda = \frac{G}{c^2 f} = 12$. Nun ſey der Theil, ver von der ganzen Laſt des Wagens auf ein einzelnes Rad kommt, = 450 ℔; das Gewicht des Rades ſelbſt = 84 ℔, alſo M = 534 ℔; ferner der Halbmeſſer des Rades $a = 15\frac{3}{4}''$, ſeine Breite $b = 3''$; ſo erhält man $\log q = 0{,}4633899$, $q = 2{,}90663''$, $a - \frac{1}{3}q = 14{,}78112$

$$\log (a - \tfrac{1}{3}q) = 1{,}1697074$$

$$\log \frac{\lambda b q^2}{2a} = 0{,}9847718$$

$$\log R = 2{,}1544792$$

$$R = 142{,}718 \text{ ℔}.$$

Nach Herrn Fuß Rechnung beträgt R = 136,878 ℔; ſo daß alſo in dieſem Falle deſſen Formel mit der meinigen ziemlich gut übereinſtimmt.

Achtes Kapitel.

Von der Umdrehung der Körper um feſte Axen.

§. 195.

Wenn bey der Bewegung eines feſten Körpers zwey ſeiner Punkte A und B in Ruhe bleiben, ſo gilt dieß auch von allen übrigen Punkten deſſelben, die in der geraden Linie AB liegen: denn es kann keiner dieſer Punkte ſeinen Ort ſo verändern, daß er dabey ſowohl von A als B ſeine vorige Entfernung behielte, wie doch nach dem Begriffe der Feſtigkeit des Körpers durchaus erforderlich iſt.

Eine ſolche Linie AB nennt man eine **feſte Axe** des Körpers, und die Bewegung deſſelben, ſeine **Umdrehung** um dieſe Axe.

§. 196.

Indem der Körper ſich um die feſte Axe AB dreht, bewegt ſich

Fig. 23. I. jeder ſeiner Punkte F in einer auf AB ſenkrechten Ebene FCf, und beſchreibt darin um den Punkt C, worin die Axe von gedachter Ebene geſchnitten wird, einen Kreis.

II. Während der Punkt F durch den Bogen Ff fortrückt, durchläuft jeder andere Punkt des Körpers Z ein ähnliches Bogenſtück Zz; dem nemlich ein eben ſo

ßer Winkel ZOz = FCf an ſeinem Mittelpunkte O
gehört.

Beweis I. Es ſey f der Ort, wohin der Punkt F
ach Verlauf einer beliebigen Zeit gelangt iſt. Man
ille aus F auf die Axe AB das Perpendikel FC, und
iehe die Linie Cf, ſo iſt, vermöge der Feſtigkeit des
örpers, und wegen der unveränderlichen Lage, worin
. und C während der Bewegung des Punktes F geblie-
en ſind, fA = FA, und fC = FC; alſo ſind die Drey-
ke AfC und AFC kongruent, und es iſt folglich auch
Cf = 90°, mithin die Ebene FCf auf AC ſenkrecht.

II. Indem F und Ff fortrückt, beſchreibt auch der
unkt Z einen Bogen Zz, der in einer, ebenfalls auf
B ſenkrechten, Ebene ZOI liegt. Man laſſe dieſe von
er Ebene FCB in OI ſchneiden, ſo iſt auch OI auf AB
nkrecht, alſo mit CF parallel, und wenn man daher
I = CF macht, läuft auch FI mit CO parallel, und iſt
= CO, oder = dem ſenkrechten Abſtande der beyden
arallelen Ebenen FCf und IOZ, den wir = p nennen
ollen.

Nun habe während der Zeit, da F in f kommt, I
en Weg Ii gemacht, ſo iſt der jetzige Abſtand fi der
eyden Punkte f und i noch = dem vorigen FI = p;
lſo fi auf IOZ gleichfalls ſenkrecht, und folglich mit
O parallel. Demnach liegen Cf und Oi in einer Ebe-
e, und ſind wegen der rechten Winkel, die ſie beyde
it CO machen, ebenfalls parallel; woraus zuvörderſt
ie Gleichheit der Winkel FCf und IOi folgt.

Ferner iſt in den Dreyecken ZOI und zOi, IO =

io, ZO = zO, und ZI = zi, alſo der Winkel zOi = ZOI; hierzu beyderſeits noch den Winkel Zoi addirt, giebt endlich ZOz = IOi = FCf.

§. 197.

1. Wenn daher einer der Punkte im Körper, z. B. F, ſich gleichförmig in ſeinem Kreiſe bewegt, ſo gilt ſolches auch von jedem andern Punkte Z deſſelben: denn alsdann iſt der Bogen Ff, und mit ihm der dazu gehörige Winkel FCf, der Zeit proportional, worin er zurückgelegt wird; folglich auch, da FCf = ZOz iſt, der Bogen Zz, den der Punkt Z beſchreibt.

2. Man ſagt in dieſem Falle vom ganzen Körper, er drehe ſich um ſeine Axe AB **gleichförmig**, und nennt den Winkel, der von jedem Radius, wie FC und ZO, in einer Sekunde beſchrieben wird, oder auch den dazu gehörigen Bogen für den Halbmeſſer = 1, die **Winkelgeſchwindigkeit** dieſer gleichförmigen Umdrehung.

3. Es ſey dieſe = γ; die Geſchwindigkeit des Punktes F in ſeiner Bahn, oder der Raum, den derſelbe in einer Sekunde durchläuft, = c; die des Punktes Z = u; ſo iſt c = γ . FC, und u = γ . ZO; alſo c : u = FC : ZO . d. h. die Geſchwindigkeiten zweyer Punkte des Körpers in ihren Kreisbahnen verhalten ſich, wie ihre ſenkrechten Entfernungen von der Umdrehungsaxe.

4. Wir haben §. 60. geſehen, daß ein materieller Punkt, der in einem Kreiſe, oder irgend einer andern vorgeſchriebenen Kurve ſich bewegt, ſeine Geſchwindig-

it in derſelben ohne Einwirkung einer Kraft nicht ändre. Hieraus folgt offenbar, daß eben dies Geſetz der rägheit auch bey der Umdrehung eines Körpers, oder nzen Syſtems ſolcher einzelnen Theilchen um eine feſte re ſtatt finden müſſe; daß nemlich der Körper ſo lange rfahre, mit der einmal erhaltenen Winkelgeſchwindigkeit ſich gleichförmig um die Axe zu drehen, bis durch gend eine Kraft die Umdrehung beſchleunigt oder vergert wird.

§. 198.

Wenn der Winkel FCf $= \Phi$, um den ſich der Körr in einer gegebenen Zeit t gedrehet hat, dieſer Zeit cht proportional, ſondern irgend eine zuſammengeſetzre Funktion davon iſt, ſo heißt die Umdrehung des örpers ungleichförmig. Seine Winkelgeſchwindigkeit t alsdann eine veränderliche Größe, die aus dem Gezze, nach welchem Φ von t abhängt, auf folgende Art ſtimmt wird.

1) Man nenne den Bogen, den der Punkt F während der Zeit t beſchrieben hat, $= s$, ſeine Geſchwindigkeit zu Ende derſelben $= v$, den Halbmeſſer des Kreiſes, orin er ſich bewegt, FC $= f$, ſo hat man (§. 58. 11.) $= \frac{ds}{dt}$; ferner $s = f\Phi$, alſo $\frac{ds}{dt} = f \cdot \frac{d\Phi}{dt}$, und folglich $= f \cdot \frac{d\Phi}{dt}$.

2) Und wenn z, u, r eben dieſe Stücke für den unkt Z bedeuten, ſo iſt $u = \frac{dz}{dt}$, $z = r\Phi$, $\frac{dz}{dt} = r$.

$\frac{d\Phi}{dt} = u$; mithin $v : u = f : r$. Daher verhalten sich auch noch bey ungleichförmiger Umdrehung des Körpers die gleichzeitigen Geschwindigkeiten einzelner Punkte in ihm, wie die Halbmesser ihrer Kreisbahnen.

3) Nennt man demnach für eben den Zeitpunkt die Winkelgeschwindigkeit des Körpers, oder die Umlaufsgeschwindigkeit eines seiner Punkte, der sich in der Entfernung $= 1$ von der Axe AB befindet, $= \omega$, so wird

$$1 : r = \omega : u, \text{ folglich}$$
$$\omega = \frac{u}{r} = \frac{d\Phi}{dt}.$$

§. 199.

Aufgabe. Ein Körper von gegebener Form und Masse $= M$ sey um die feste Axe AB beweglich. Auf einen seiner Punkte F wirke fortdauernd eine Kraft V in der Umdrehungsebene dieses Punktes senkrecht auf seine Entfernung $FC = f$ von der Axe. Man sucht die Winkelgeschwindigkeit des Körpers, nachdem seine Umdrehung eine gegebene Zeit t hindurch von der Kraft beschleunigt ist.

Aufl 1) Es sey diese für die angenommene Zeit $= \omega$, die Aenderung, die sie durch die Kraft V im nächsten Zeittheilchen dt leidet, $= d\omega$; ferner sey für eben die Zeit die Geschwindigkeit eines Theilchens dM der ganzen Masse M, das bey Z in der Entfernung $ZO = r$ von der Axe liegt, $= v$, so ist (§. 198. 3.) $v = r\omega$, und folglich $dv = rd\omega$.

2) Man

2) Man ſetze, dieſe Aenderung in der Geſchwin-
igkeit des Elementes dM hervorzubringen, ſey eine
raft = p, ſenkrecht auf ZO, oder nach der Tangente
es Bogens, den der Punkt Z in dem Zeittheile dt be-
hreibt, erforderlich, ſo wird (§. 62. 3.) $\frac{dv}{dt} = \frac{2gp}{dM}$.
lſo $p = \frac{dM}{2g} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{rdM}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$, und das Moment die-
ieſer Kraft gegen die Axe $AB = pr = \frac{r^2dM}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$.

3) Wenn nun zu gleicher Zeit auf jedes andere
heilchen dM des Körpers eine ſolche Kraft p wirkte,
würde eines jeden Geſchwindigkeit v eben die Aende-
ung $dv = rd\gamma$ leiden, als dadurch wirklich geſchieht,
aß der ganze Körper ſeine Winkelgeſchwindigkeit aus
γ in $\gamma + d\gamma$ umändert. Daher ſind dieſe Elemen-
arkräfte in Verbindung der Kraft V während des Zeit-
heils dt äquipollent, und müſſen alſo, auf die ihnen
ugehörigen Stellen nach entgegengeſetzter Richtung an-
ebracht, der Kraft V an der Axe AB das Gleichge-
icht halten.

4) Dem zufolge muß die Summe ihrer einzelnen
Momente, oder das Integral $\int \frac{r^2dM}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$, durch den
anzen Körper genommen, dem Momente Vf der Kraft
gleich ſeyn.

Da nun für den gegebenen Zeitpunkt der Werth
on γ beſtimmt, alſo $\frac{d\gamma}{dt}$ in dem Differenzialausdrucke
in unveränderlicher Faktor iſt, ſo erhält man

$$Vf = \frac{d\vartheta}{2gdt} \cdot \int r^2 dM, \text{ und daraus}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2gfV}{\int r^2 dM},$$

für die Zunahme $d\vartheta$ der Winkelgeschwindigkeit des Körpers, die in jedem Zeittheile dt durch die Kraft V hervorgebracht wird.

Vom Momente der Trägheit.

§. 200.

Das Integral $\int r^2 dM$, oder die Summe von den Produkten aller Elemente des Körpers in die Quadrate ihrer Entfernungen von der Axe AB, hat für jeden gegebenen Körper, der sich um eine bestimmte Axe dreht, einen unveränderlichen Werth, der zuvor berechnet werden muß, ehe man von der gefundenen Formel Gebrauch machen kann. Man nennt diese Größe das **Moment der Trägheit** des Körpers in Bezug auf seine Umdrehungsaxe.

Da dasselbe, als Summe von Größen der fünften Dimension, selbst diese Dimension haben muß, so ist begreiflich, daß man es unter der Form Mh^2 darstellen, oder als ein Produkt aus der ganzen Masse M des Körpers in das Quadrat einer bestimmten Entfernung h von der Axe betrachten könne, die nach vollendeter Integration sich leicht angeben läßt. Dies vorausgesetzt, wird:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2gfV}{Mh^2}, \text{ also}$$

$$\omega = \gamma + \frac{2gf}{Mh^2}\int V dt,$$

und in dem Falle, wenn V unveränderlich ist:

$$\omega = \gamma + \frac{2gfVt}{Mh^2};$$

in welchen beyden Formeln der beständige Theil γ die anfängliche Winkelgeschwindigkeit des Körpers bezeichnet.

§. 201.

Fig. 5. **Aufgabe.** Das Moment der Trägheit eines gleichartigen Körpers, der von einer stetigen Oberfläche begrenzt wird, in Beziehung auf irgend eine, durch ihn gehende, Axe OA zu bestimmen.

Aufl. 1) Man lege durch diese Axe, in der man irgend einen Punkt O zum Anfangspunkte der Abscissen angenommen hat, nach Gefallen eine Ebene BOA, fälle darauf aus einem beliebigen Punkte m des Körpers das Perpendikel mq, und aus q auf die Axe noch ein zweytes qp; so daß die Lage des Punktes m durch die drey rechtwinklichten Koordinaten $Op = x$, $pq = y$, und $qm = z$ bestimmt wird.

2) Man lasse diese Koordinaten um willkührliche Differenziale $pp' = dx$, $oq' = dy$, $rm' = dz$ wachsen, wodurch der Endpunkt der letztern Ordinate qm aus m an einen andern, unendlich nahe liegenden, Ort m' versetzt werden mag.

3) Zwischen den beyden Punkten m und m' ergänze man das rechtwinklichte Parallelepipedum mm', indem man durch m drey, den Koordinaten parallele,

Linien zieht, und auf dieſen die Stücke dx, dy, dz ab nimmt; ſo iſt der Inhalt von deſſen Grundfläche = dxdy, und ſeine Höhe = dz; alſo ſein körperlicher Inhalt = dxdydz, und wenn man die Dichte des Körpers = x ſetzt, ſeine Maſſe dM = xdxdydz.

4) Dabey iſt ſeine Entfernung nip von der Axe, die (§. 199. 1.) r genannt wurde, = $\sqrt{(y^2+z^2)}$; alſo das Produkt

$r^2dM = (y^2+z^2)\,dM = xdzdydz\,(y^2+z^2)$.

5) Dies Produkt von allen Elementen des Körpers, die längs mq liegen, zuſammengenommen, oder ſolchergeſtalt integrirt, daß dabey nur z als veränderlich angeſehen wird, giebt das Moment der Trägheit der ganzen Säule, die bey eben der Grundfläche des zuvor betrachteten Parallelepipedums (3) die Höhe mq = z hat, = $xdxdy\,(y^2z+\frac{1}{3}z^3)$.

6) Das Differenzial $(y^2+z^2)\,dM$ iſt jederzeit poſitiv, und vergrößert folglich ſein Integral, auch wenn die Ordinate mq unterhalb q fortgeſetzt wird. Um alſo letzteres vollſtändig zu haben, muß darin z beyden Theilen der ganzen Ordinate, die von q bis zur Oberfläche gehen, gleich geſetzt, und was daraus entſpringt, addirt werden.

7) Begreiflich können dieſe Werthe von z nur allein von x und y abhängen, und wenn man alſo den Ausdruck, worin ſich $y^2z+\frac{1}{3}z^3$ durch die Subſtitution verwandelt, = Y ſetzt, ſo ſind x und y die einzigen veränderlichen Größen, die in dieſem Y noch vorkommen.

8) Man nehme nun ferner von xdxdy . Y, in

em man bloß y als veränderlich betrachtet, das Integral $= \varkappa dx \int Y dy$, und ſetze darin für y die beyden Theile der Ordinate pq, die auf verſchiedenen Seiten der Axe von p aus bis zum Umfange der Ebene BOA inlaufen.

9) Die beyden Werthe von $\int Y dy$, die hieraus entſtehen, addire man, und nenne die Summe $= X$, ſo erhält man $\varkappa X dx$ für das Moment der Trägheit von dem Schnitte des Körpers, der zwiſchen den beyden unendlich nahe liegenden parallelen Ebenen pqm, p'q'm' enthalten iſt.

10) Dies nochmals nach x integrirt, und dann x = den beyden Theilen der ganzen Axe OA genommen, ſo weit dieſelbe von O aus innerhalb dem Raume des Körpers nach entgegengeſetzten Seiten fortläuft, und, was herauskommt, addirt, giebt endlich für dieſe Axe das verlangte Moment der Trägheit des ganzen Körpers.

§. 202.

Fig. 24. **Exempel** 1. Der Körper ſey ein rechtwinklichtes Parallelepipedum AI, und die eine Seitenlinie AB ſeiner Grundfläche CAB die Axe, wofür man ſein Moment der Trägheit zu beſtimmen ſucht.

Man ſetze dieſe $= a$; die andere Seite AC der Grundfläche $= b$, die Höhe $AD = c$; ſo iſt zuvörderſt, wenn die Grundfläche zur Ebene der beyden Ordinaten x und y angenommen wird, der eine Werth von z, den man in $y^2 z + \frac{1}{3} z^3$ zu ſubſtituiren hat, $= c$, der andere $= 0$; alſo:

$$Y = y^2c + \tfrac{1}{3}c^3, \text{ mithin}$$
$$\int Y dy = \tfrac{1}{3}y^3c + \tfrac{1}{3}c^3y.$$

Hierin $y = b$ gesetzt, erhält man ferner:

$$X = \tfrac{1}{3}b^3c + \tfrac{1}{3}c^3b,$$
$$\int X dx = \tfrac{1}{3}x\,(b^3c + c^3b),$$

und folglich, wenn man $x = a$ nimmt, das Mo
der Trägheit des Parallelepipedums gegen die Ax
$= \frac{1}{3}\varkappa a\,(b^3c + c^3b) = \frac{1}{3}\varkappa abc\,(b^2 + c^2)$, oder
seine Masse $M = \varkappa abc$ ausgedrückt, $= \frac{1}{3}M\,(b^2$
$= \frac{1}{3}M \cdot BI^2$.

§. 203.

Fig. 25. **Exempel II.** Das Moment der Träg
nes geraden Prisma's AF, dessen Grundfläche ein
winklichtes Dreyeck ACD ist, in Beziehung a
Seitenlinie AB einer der spitzen Kanten zu finden

Es sey die Länge der Axe AB, oder die
Prisma's, $= a$; der daranliegende Kathet
Grundfläche $= b$, der andere Kathet CD =
sey pol ein unbestimmter Querschnitt des Pris
rallel der Grundfläche, und in demselben m
auf po, also auch senkrecht auf der Seitenf
die wir zur Ebene der Coordinaten x und
wollen, so ha

ob

§. 206.

Exempel IV. Das Moment der Trägheit eines geraden Cylinders für einen Durchmesser seiner Grundfläche zu finden.

1) Es sey seine Höhe $= a$, der Halbmesser seiner Grundfläche, die wir zur Ebene der Koordinaten x und y annehmen wollen, $= b$, so ist für die Oberfläche $z = a$, mithin

$$y = y^2 a + \tfrac{1}{3} a^3$$
$$\int Y dy = \tfrac{1}{3} y^3 a + \tfrac{1}{3} a^3 y.$$

2) Und wenn man den Anfangspunkt der Abscissen in den Mittelpunkt der Grundfläche setzt, und zuerst nur die Rechnung für den Quadranten anstellt, hat man für dessen Umfang $y^2 = b^2 - x^2$; unter welcher Bedeutung von y also

$$\int X dx = \tfrac{1}{3} a \,(\int y^3 dx + a^2 \int y dx) \text{ wird.}$$

3) Nun ist nach der bekannten Formel $\int p dq = pq - \int q dp$, wenn man darin $p = y^3$ und $q = x$ setzt,

$$\int y^3 dx = y^3 x - 3 \int x y^2 dy,$$

oder, da $y dy = -x dx$,

$$\int y^3 dx = y^3 x + 3 \int x^2 y dx.$$

4) Ferner bekommt man auch, indem man bloß für y^2 seinen Werth $b^2 - x^2$ setzt,

$$\int y^3 dx = b^2 \int y dx - \int x^2 y dx.$$

5) Letztere Gleichung durch 3 multiplicirt, und dann zu ersterer (3) addirt, giebt:

$$4 \int y\, dx = y^3 x + 3 b^2 \int y dx, \text{ also:}$$
$$\int X dx = \tfrac{1}{4} a \,(\tfrac{1}{4} y^3 x + (a^2 + \tfrac{3}{4} b^2) \int y dx),$$

dessen Werth für $x = b$, $= \frac{1}{12} \pi a b^2 (a^2 + \frac{3}{4} b^2)$ ist,

weil alsdann der erſte Theil verſchwindet, und im letztern das Integral $\int y dx$ bekanntlich $= \frac{1}{4}\pi b^2$ wird.

6) Hiervon das Vierfache genommen, erhält man den Werth von $\int X dx$ für den ganzen Kreis $= \frac{1}{3}\pi ab^2 (a^2 + \frac{3}{4}b^2)$; alſo das Moment der Trägheit des Cylinders für den Durchmeſſer ſeiner Grundfläche $= \varkappa \int X dx = \pi\varkappa ab^2 (\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{4}b^2)$, oder durch ſeine Maſſe M $= \pi\varkappa ab^2$ ausgedrückt, $= M(\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{4}b^2)$.

§. 207.

Bey Körpern, deren Oberflächen durch Gleichungen vom zweyten, oder einen noch höhern Grade beſtimmt werden, iſt doch die Entwickelung des doppelten Integrals $\iint Y dx dy$ mit zu vielen Schwierigkeiten verknüpft, als daß man nicht lieber in ſolchen Fällen den allgemeinen Weg verlaſſen, und nach Beſchaffenheit der Umſtände beſondere Hülfsmittel zur Vereinfachung des Kalkuls aufſuchen ſollte, wie uns dergleichen z. B. die runden Körper darbieten. Ehe wir aber zu dieſen übergehen, muß ich noch etwas über den merkwürdigen Zuſammenhang zwiſchen den Momenten der Trägheit eines Körpers in Anſehung paralleler Axen ſagen, worauf man durch die bisherige Methode folgendermaßen geleitet wird:

Fig. 27. 1) Es ſey das Moment der Trägheit eines gegebenen Körpers, deſſen Maſſe $= M$ iſt, in Beziehung auf irgend eine Axe OA . . . . . $= Mh'^2$; in Anſehung einer andern ihr parallelen Axe oa $= Mh''^2$; die ſenkrechte Entfernung Oo zwiſchen beyden $= e$.

2) Man lege die Ebene BOA (§. 201. 1.) so, daß sie zugleich durch oa geht, und setze, wie dort, als Koordinaten eines beliebigen Punktes m im Körper: $Op = x$, $pq = y$, $qm = z$; so war zuvörderst (ebendas. 4.)

$$Mh^2 = \int (y^2 + z^2)\, dM,$$

wo $dM = \varkappa dx dy dz$ angenommen wurde.

3) Man verlängere ferner die Ordinate qp bis sie die andere Axe oa in π schneidet, und nenne als Koordinaten desselben Punktes m für diese letztere Axe: $o\pi = x'$, $\pi q = y'$, $qm = z'$, so erhält man auf gleiche Art:

$$Mh'^2 = \int (y'^2 + z'^2)\, dM,$$

und außerdem $x' = x$, $y' = y + e$, $z' = z$, also:

$$dx' = dx,\ dy' = dy,\ dz' = dz,$$

daher das Element dM hier eben die Bedeutung hat, wie vorhin (2.)

4) Durch die Substitution der beyden Werthe $y + e$ und z für y' und z' verwandelt sich nun das letztere Integral in folgendes:

$$Mh'^2 = \int [(y + e)^2 + z^2]\, dM = \int (y^2 + z^2)\, dM + 2e \int y\, dM + e^2 \int dm.$$

5) Von diesen dreyen Theilen ist der erstere $\int (y^2 + z^2)\, dM = Mh^2$ (2); ferner $\int dM$, durch den ganzen Körper genommen, $= M$, und wenn man aus dessen Schwerpunkte g die Koordinaten $gf = c$, $fe = b$, und $eo = a$ zieht, so hat man zu deren Bestimmung (Statik §. 74.) die Gleichungen:

$$a = \frac{\int x\, dM}{M},\quad b = \frac{\int y\, dM}{M},\quad c = \frac{\int z\, dM}{M},$$

mithin $\int y\, dM = bM$

6) Demnach wird endlich

$$Mh'^2 = Mh^2 + 2ebM + e^2M = M(h^2 + 2be + e^2).$$

§. 208.

1. Man ſetze noch die Entfernung des Schwerpunktes g von der erſteren Axe OA = D, von der letztern oa = d, ſo iſt

$$D^2 = ge^2 = ef^2 + fg^2 = b^2 + c^2,$$

und eben ſo: $d^2 = (b + e)^2 + c^2$, folglich

$$d^2 - D^2 = (b + e)^2 - b^2 = 2be + e^2,$$

wodurch $Mh'^2 = M(h^2 + d^2 - D^2)$ wird.

2. Es iſt daher jedesmal $Mh'^2 > Mh^2$, wofern $d > D$ iſt, d. h. je weiter die Axe des Körpers in paralleler Lage von ſeinem Schwerpunkte wegrückt, deſto größer wird ſein Moment der Trägheit für dieſelbe. Am kleinſten iſt es alſo, wenn die Axe in den Schwerpunkt hineinfällt.

3. Es ſey jetzt OA eine ſolche durch den Schwerpunkt gehende Axe; das Moment der Trägheit für dieſelbe $= Mh^2$, ſo iſt hier $D = o$, mithin

$$Mh'^2 = M(h^2 + d^2)$$

Weiß man demnach das Moment der Trägheit des Körpers für irgend eine durch ſeinen Schwerpunkt gehende Axe, ſo findet man daraus ſein Moment der Trägheit für jede andere ihr parallele Axe, wenn man zu elbigem das Produkt Md^2 aus der Maſſe des Körers in das Quadrat ihrer Entfernung vom Schwerunkte hinzufügt.

§. 209.

Fig. 24. **Exempel** I. Es sey vom rechtwinklichten Parallelepipedum AI die eine Seite AB der Grundfläche $= a$, die andere $AC = b$, die Höhe $= c$, seine Masse $= M$; also sein Moment der Trägheit in Beziehung auf $AB = \frac{1}{3}M(b^2 + c^2)$ (§. 202.). Man ziehe durch seinen Schwerpunkt eine mit AB parallele Linie, die die Seitenfläche BI in G treffen mag, und setze sein Moment der Trägheit für diese $= Mh^2$; ferner sey noch GF auf BH senkrecht, so ist $BF = \frac{1}{2}b$, $GF = \frac{1}{2}c$, mithin $BG^2 = d^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2)$, und daher:

$$\frac{1}{3}M(b^2 + c^2) = M[h^2 + \frac{1}{4}(b^2 + c^2)],$$

$$h^2 = \frac{1}{12}(b^2 + c^2),$$

also das Moment der Trägheit des Parallepd. in Ansehung der durch seinen Schwerpunkt gehenden, mit AB parallelen, Axe $\frac{1}{12}M(b^2 + c^2) = \frac{1}{3}M \cdot BG^2$.

Und in Bezug auf die Axe EF, die, parallel mit AB, durch die Mitte der Grundfläche geht, $= M(h^2 + \frac{1}{4}c^2) = \frac{1}{3}M(c^2 + \frac{1}{4}b)$.

2. Für den Durchmesser der Grundfläche eines senkrechten Cylinders, dessen Höhe $= a$, Halbmesser $= b$, war das Moment der Trägheit $= M(\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{4}b^2)$ (§. 206.). Man setze dasselbe für einen, durch seinen Schwerpunkt gehenden Durchmesser $= Mh^2$, so hat man

$$M(\tfrac{1}{3}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2) = M(h^2 + \tfrac{1}{4}a^2), \text{ mithin}$$

$$Mh^2 = \tfrac{1}{4}M(b^2 + \tfrac{1}{3}a^2).$$

§. 210.

Fig. 6. **Aufgabe.** Das Moment der Trägheit eines runden Körpers, der durch Umdrehung einer ebenen Fi-

gur AMDB um ihre Axe AB entstanden ist, in Beziehung auf diese Axe zu bestimmen.

Aufl. 1) Es sey die Abscisse AP der Kurve AMD, wodurch die Figur ADB begrenzt wird, $= x$; die dazu gehörige Ordinate PM $= y$; das unendlich kleine Stück Pp der Axe, oder das Differenzial der Abscisse $= dx$; so ist der Inhalt von dem Segmente des Körpers, das zwischen den beyden durch P und p gehenden, auf AB senkrechten, Querschnitten liegt, $= \pi y^2 dx$, und wenn wir die Dichte des Körpers $= \varkappa$ setzen, seine Masse $= \pi\varkappa y^2 dx$.

2) Also die Masse des ganzen Körpers $M = \pi\varkappa \int y^2 dx$, worin $x =$ AB gesetzt werden muß.

3) Man theile noch ferner das eben betrachtete Segment (1) in lauter unendlich schmale und koncentrische Ringe, und setze den innern Halbmesser eines solchen Ringes, oder seine Entfernung von P, $= r$, seine Breite $= dr$; so ist dessen Masse $dM = 2\pi\varkappa r dr dx$, und da alle seine Theile einerley Entfernung von der Axe haben, sein Moment der Trägheit gegen dieselbe: $r^2 dM = 2\pi\varkappa r^3 dr dx$.

4) Hiervon das Integral nach r genommen, und darin $r = y$ gesetzt, giebt das Moment der Trägheit des gedachten Segmentes $= \frac{1}{2}\pi\varkappa y^4 dx$, und dieses nochmals noch x integrirt, das des ganzen Körpers $Mh^2 = \frac{1}{2}\pi\varkappa \int y^4 dx$, nachdem in diesem Integrale $x =$ der Länge der ganzen Axe AB genommen ist.

5) Substituirt man nun für M den vorhin erhal-

tenen Werth $\pi\int y^2 dx$, und dividirt die Gleichung damit, ſo erhält man:

$$h^2 = \frac{\int y^4 dx}{2\int y^2 dx},$$

ſo daß das geſuchte Moment der Trägheit des Körpers in Bezug auf die Axe AB, durch ſeine Maſſe M ausdrückt, $= \frac{M\int y^4 dx}{2\int y^2 dx}$ wird.

§. 211.

1. Beym geraden Cylinder iſt y der Halbmeſſer eines Querſchnittes, der von der Grundfläche um die Weite $= x$ entfernt liegt, und folglich mit dem Halbmeſſer der Grundfläche einerley. Setzt man alſo dieſen $= b$, ſo wird

$$\int y^4 dx = b^4 x, \text{ und } \int y^2 dx = b^2 x,$$

mithin das Moment der Trägheit des geraden Cylinders in Anſehung ſeiner geometriſchen Axe $= \frac{Mb^4 x}{2b^2 x} = \frac{1}{2}Mb^2$

2. Beym geraden Kegel ſey die Höhe $AB = a$ der Halbmeſſer der Grundfläche $BD = b$, ſo hat man

$$x : y = a : b, \text{ oder } y = \frac{bx}{a},$$

folglich $\int y^4 dx = \frac{b^4 x^5}{5a^4}$, $\int y^2 dx = \frac{b^2 x^3}{3a^2}$,

und der Werth des Quotienten $\frac{\int y^4 dx}{\int y^2 dx}$, für $x = a$, $= \frac{3}{5}b^2$

alſo das Moment der Trägheit des Kegels in Beziehung auf ſeine geometriſche Axe $= \frac{3}{10}Mb^2$.

3) U

3) Um das Moment der Trägheit des abgekürzten
gels für eben die Axe zu finden, ſetze man die Maſſe
ſſelben = M; die des fehlenden Stückes, das ihn
m vollſtändigen Kegel ergänzen würde, = F; die des
nzen Kegels = G; außerdem ſey der Halbmeſſer der
ern Grundfläche = c, der untern = b; ſo iſt
das Moment der Trägheit des obern

Kegels . . . . . = $\frac{1}{10}$ Fc²

des ganzen = $\frac{1}{10}$ Gb²,

glich das des abgekürzten Kegels = $\frac{1}{10}$ (Gb² − Fc²)

Ferner iſt M = G − F, und F = $\frac{c^3}{b^3}$. G, alſo

= (1 − $\frac{c^3}{b^3}$) G, und daher G = $\frac{b^3 M}{b^3 - c^3}$. Dieſe
erthe für F und G nach einander in der vorhergehen-
Formel ſubſtituirt, geben das geſuchte Moment der
igkeit des abgekürzten Kegels, durch ſeine Maſſe
sgedrückt, = $\frac{1}{10}$ M $\left(\frac{b^5 - c^5}{b^3 - c^3}\right)$.

§. 212.

1. Für die Kugel, oder ein Segment derſelben, iſt
VID ein Bogen ihres größten Kreiſes; folglich, wenn
an ihren Halbmeſſer = a nennt, $y^2 = 2ax - x^2$.
adurch wird $\int y^4 dx = \frac{4}{3}a^2x^3 - ax^4 + \frac{1}{5}x^5$, $\int y^2 dx$
: $ax^2 - \frac{1}{3}x^3$; mithin das Moment der Trägheit eines
ugelſegments von der Höhe = x, durch ſeine Maſſe
ſtimmt, = $\frac{M\int y^4 dx}{2\int y^2 dx} = M \cdot \frac{20a^2x - 15ax^2 + 3x^3}{30a - 10x}$.

2. Setzt man hierin $x = 2a$, so erhält man das Moment der Trägheit der ganzen Kugel in Bezug auf ihren Durchmesser $= \frac{4}{5}Ma^2$.

3. Von einem elliptischen Sphäroid sey die halbe Polaraxe $= a$, der Halbmesser des Aequators $=$ die Masse, wie vorhin, $= M$. Man beschreibe über der gedachten Axe einen Halbkreis mit dem Halbmesser $= a$, und setze für die Abscisse $AP = x$, dessen Ordinate $= Y$, so hat man bekanntlich:

$$Y : y = a : b, \text{ oder } y = \frac{bY}{a}; \text{ also:}$$

$$\int y^4 dx = \frac{b^4}{a^4}\int Y\,dx,\ \int y^2 dx = \frac{b}{a^2}\int Y^2 dx, \text{ und } \frac{\int y^4 dx}{2\int y^2 dx} = \frac{b^2}{a^2}\frac{\int Y^4 dx}{2\int Y^2 dx}.$$

Da nun (1) $\frac{\int y^4 dx}{2\int Y^2 dx} = \frac{2}{5}a^2$, so wird $\frac{\int y^4 dx}{2\int y^2 dx} = \frac{2}{5}b^2$, und folglich das Moment der Trägheit des Sphäroids in Bezug auf seine Polaraxe $= \frac{2}{5}Mb^2$.

§. 213.

Aufgabe. Das Moment der Trägheit des runden Körpers für eine durch seinen Scheitel A auf die Axe AB senkrecht gezogene Linie zu finden.

Aufl. 1) Wenn man in der Formel (§. 209. 2) statt M, b, a, hier $\pi\lambda y^2 dx$, y und dx setzt, so hält man das Moment der Trägheit des cylindrischen Segmentes (§. 210. 1.) für den, durch seinen Schwerpunkt gehenden, mit gedachtem Perpendikel parallel

Durchmeſſer $= \frac{1}{4}\pi\nu y^4 dx$; alſo wird daſſelbe in Bezug auf das Perpendikel ſelbſt, wovon ſein Schwerpunkt um $\frac{1}{4}y^2 + x^2$ entfernt liegt $= \pi\nu y^2 dx\,(\frac{1}{4}y^2 + x^2)$; mithin das Moment der Trägheit des ganzen Körpers für dieſe Axe $= \pi\nu\,(\frac{1}{4}\int y^4 dx + \int y^2 x^2 dx)$, oder durch ſeine Maſſe $M = \pi\nu\int y^2 dx$ ausgedrückt, $= \frac{1}{4}M\frac{\int y^4 dx}{\int y^2 dx} + M\cdot\frac{\int y^2 x^2 dx}{\int y^2 dx}$, worin nach geſchehener Integration $x = AB$ geſetzt werden muß.

2) Der erſte Theil hiervon iſt die Hälfte von dem Moment der Trägheit des Körpers in Anſehung ſeiner geometriſchen Axe; nennen wir alſo dies $= Mh^2$, ſo wird endlich ſein Moment der Trägheit für die durch A gehende, auf AB ſenkrechte, Axe $= \frac{1}{2}Mh^2 + M\cdot\frac{\int y^2 x^2 dx}{\int y^2 dx}$.

§. 214.

1. Für den geraden Cylinder, deſſen Höhe $= a$, Halbmeſſer der Grundfläche $= b$, iſt $y = b$; daher $\int y^2 x^2 dx = \frac{1}{3}b^2 x^3$, $\int y^2 dx = b^2 x$, und der Werth des Quotienten $\frac{\int y^2 x^2 dx}{\int y^2 dx}$, für $x = a$, $= \frac{1}{3}a^2$. Ferner iſt $h^2 = \frac{1}{2}b^2$, mithin das Moment der Trägheit des Cylinders für den Durchmeſſer ſeiner Grundfläche $= M\,(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{3}a^2)$, wie im §. 206. ſchon gefunden iſt.

2. Beym geraden Kegel, deſſen Höhe ebenfalls $= a$, Halbmeſſer der Grundfläche $= b$, war $y = \frac{bx}{a}$;

also wird $\int y^2x^2dx = \frac{b^2x^5}{5a^2}$, $\int y^2dx = \frac{b^2x^3}{3a^2}$; mithin der Werth von $\frac{\int y^2x^2dx}{\int y^2dx}$, für $x = a$, $= \frac{3}{5}a^2$, und da hier $h^2 = \frac{3}{10}b^2$ ist, das Moment der Trägheit des Kegels für eine, durch dessen Spitze auf seine centrale Axe senkrecht gezogene, Linie $= \frac{3}{5}M(a^2 + \frac{1}{4}b^2)$.

3. Da der Schwerpunkt des Kegels von der Spitze um $\frac{3}{4}a$ entfernt liegt, so erhält man ferner sein Moment der Trägheit für eine durch den Schwerpunkt gehende, auf AB senkrechte, Axe $= \frac{3}{5}M(a^2 + \frac{1}{4}b^2) - \frac{9}{16}Ma^2$ $= \frac{3}{20}M(b^2 + \frac{1}{4}a^2)$.

4. Beym elliptischen Sphäroid (§. 212. 3.) ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ also $\int y^2x^2dx = \frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{3}ax^4 - \frac{1}{5}x^5)$, $\int y^2dx = \frac{b^2}{a^2}(ax^2 - \frac{1}{3}x^3)$, folglich $\frac{\int y^2x^2dx}{\int y^2dx}$ $= \frac{(15a - bx)x^2}{30a - 10x}$, und dessen Werth, für $x = 2a$, $= \frac{6}{5}a^2$; also das Moment der Trägheit des Sphäroids für die durch seinen Pol gehende Tangente $= \frac{1}{5}Mb^2 + \frac{6}{5}Ma^2$; und für den Durchmesser seines Aequators $= \frac{1}{5}M(a^2 + b^2)$.

Von der Schwingung der Körper um feste Axen.

§. 215.

Man nennt im Allgemeinen jede Bewegung wiederkehrend, die innerhalb gewisser Grenzen nur eine

Zeitlang auf einerley Art fortdauert, und alsdann plötzlich in die entgegengesetzte übergeht, so daß ein Körper, der einer solchen Bewegung unterworfen ist, nach Verlauf einer bestimmten Zeit allemal wieder an seinen vorigen Ort, und in seine anfängliche Lage zurückkommt. Bey festen Körpern giebt es nur drey Arten derselben: die **fortrückende**, wobey der Körper einerley Weg wechselsweise vor und rückwärts macht; die **drehende**, wobey er um eine feste Axe einerley Winkel hin und her beschreibt; und endlich die **zusammengesetzte**, die aus fortrückender und drehender Bewegung zugleich besteht.

Letztere beyden Arten führen auch gemeinschaftlich den Namen **Schwingungen**, weil sie sich größtentheils nach einerley Gesetze richten, wiewohl sie sonst, ihrem Wesen nach, ganz verschieden von einander sind; wie z. B. die rollende Schwingung eines Cylinders, der sich innerhalb einer hohlen Kurve hin und her wälzt, und das Schwanken desselben um eine feste Axe. Noch mehr unterscheiden sich von diesen die Schwingungen der biegsamen und elastischen Körper, bey denen zugleich eine Aenderung ihrer Form statt findet: da aber die Bewegung dieser Körper überhaupt auf ganz eigenthümlichen Gründen beruhet, so werde ich alles dahin gehörige ganz zuletzt in ein besonderes Kapitel zusammenfassen.

Gegenwärtige Betrachtung betrifft nur allein die drehende Schwingung eines festen Körpers, und zwar in sofern sie durch sein eigenes Gewicht hervorgebracht

wird. Sie findet unstreitig hier ihren schicklichsten Platz, da sie sich unmittelbar auf die vorhergehende Theorie gründet, und als eine nützliche Anwendung derselben zugleich zu ihrer nähern Erläuterung dienen kann.

§. 216.

Ein Körper, der an einer unbeweglichen horizontalen Axe frey aufgehängt wird, und Anfangs in Ruhe ist, kann darin nur beharren, wenn sein Schwerpunkt in die, durch die Axe gehende, vertikale Ebene fällt. In jeder andern Lage muß er nothwendig, da sein Schwerpunkt alsdann nicht unterstützt ist, vermöge seines Gewichtes herabsinken, und dadurch um die feste Axe in eine drehende Bewegung gesetzt werden. Um nun diese zu bestimmen, sey

Fig. 28. I. G der anfängliche Ort des Schwerpunktes; C der Punkt der Axe, worin sie von einer, durch G gehenden, auf sie senkrechten Ebene geschnitten wird; die Entfernung $CG = f$, und die Abweichung dieser Linie von der Vertikale $CI = \eta$.

2. Nachdem die Bewegung eine Zeit t gedauert hat, sey der Schwerpunkt durch den Bogen GM fortgerückt; sein jetziger Abstand MCI von der Vertikale $= \varphi$, und die Winkelgeschwindigkeit des Körpers in diesem Augenblicke $= \omega$; so ist der Winkel GCM, um den sich der Körper gedrehet hat, $= \eta - \varphi$, also (§. 198.)

$$\omega = \frac{d(\eta - \varphi)}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}, \text{ und } \frac{d\omega}{dt} = -\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

3) Man nenne ferner das Gewicht des Körpers,

das von seinem Schwerpunkte aus nach der Vertikale Mv wirkt, = M, und um den Theil davon zu erhalten, der zur Umdrehung des Körpers allein wirksam ist, zerlege man es in eine Kraft nach Mr, der Verlängerung von CM, und in eine, darauf senkrechte, nach Mu. Erstere, = M Cos φ, übt nach der Richtung CM einen Druck auf den Punkt C der Axe aus, und wird dadurch aufgehoben; letztere hingegen, = M Sin φ wird ganz auf die Umdrehung des Körpers verwandt, und hat gegen die Axe das Moment = Mf Sin φ.

4) Es bleibt jetzt noch übrig, das Moment der Trägheit des Körpers für die Umdrehungsaxe zu wissen. Zu dem Ende sey dasselbe in Ansehung der durch seinen Schwerpunkt gehenden, mit jener parallelen, Axe = Mh²; das sich aus der gegebenen Gestalt des Körpes auf irgend eine Art wird bestimmen lassen; so ist das gesuchte = M (f² + h²) (§. 208. 3.).

5) Demnach erhält man (§. 200.)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2gMf \operatorname{Sin} \varphi}{M(f^2+h^2)} = \frac{2gf \operatorname{Sin} \varphi}{f^2+h^2},$$

woraus die Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{2gf \operatorname{Sin} \varphi}{f^2+h^2}$$ entspringt.

6) Diese mit 2dφ multiplicirt, und dann integrirt, giebt:

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = v^2 = C + \frac{4gf \operatorname{Cos} \varphi}{f^2+h^2},$$

und da zu Anfange der Bewegung, oder für v = o, φ = η war, so wird zur Bestimmung der Konstante

$$o = C + \frac{4gf \operatorname{Cos} \eta}{f^2 + h^2},$$

also $C = -\frac{4gf \operatorname{Cos} \eta}{f^2 + h^2}$; und folglich:

$$\gamma^2 = \frac{4gf}{f^2 + h^2} \cdot (\operatorname{Cos} \varphi - \operatorname{Cos} \eta).$$

§. 217.

1. So lange also der Winkel φ positiv bleibt, oder M noch diesseits der Vertikale CI sich befindet, wächst die Winkelgeschwindigkeit des Körpers, wie sein Schwerpunkt der Vertikale nach und nach näher rückt.

2. Wenn er in sie hinein zu liegen kommt, ist $\varphi = o$, folglich

$$\gamma = \sqrt{\left[\frac{4gf}{f^2 + h^2}(1 - \operatorname{Cos} \eta)\right]}.$$

Dies ist offenbar der größte Werth, den γ erreichen kann, weil für jeden andern Winkel φ, er sey positiv oder negativ, allemal $\operatorname{Cos} \varphi < 1$ ist. Der Körper dreht sich also in der Lage, worin er von der Axe gänzlich unterstützt wird, gerade am schnellsten.

3. Von diesem Augenblicke an tritt nun der Schwerpunkt auf die andere Seite der Vertikale, und entfernt sich von ihr, indem er durch den andern Bogen Ig aufwärts steigt. Daher wird jetzt der Winkel φ negativ, und nimmt an absoluter Größe wieder zu.

4. Da $\operatorname{Cos} - \varphi = \operatorname{Cos} \varphi$ ist, so hat der Körper bey einerley Abweichung seines Schwerpunktes von der Vertikale einerley Winkelgeschwindigkeit. Sie nimmt

lglich ab, indem Φ wächst, und wird zum zweyten-
ale $= o$, wenn $\Phi = -\eta$ wird, oder der Schwer-
unkt in g eben den Winkelabstand gCI von der Verti-
le erreicht hat, den er Anfangs auf der andern Seite
GI hatte.

5. Weiter kann also derselbe von CI sich nicht ent-
ernen; wie auch schon aus der Formel (§. 216. 6.)
hellet, die für ϑ einen unmöglichen Werth giebt,
enn man darin $\Phi > \eta$ annimmt.

6. Da alles sich jetzt verhält, wie zu Anfange der
ewegung auf der andern Seite von CI, so folgt noth-
endig, daß sich der Körper nun rückwärts drehen, und
jeder Lage aufs neue dieselbe Geschwindigkeit bekom-
en müsse, die er darin zuvor nach entgegengesetzter
ichtung hatte.

7. Demnach schwingt derselbe innerhalb dem Win-
kraume GCg unaufhörlich fort, oder beschreibt diesen
Winkel um seine Axe in gleichen Zeitabtheilungen wech-
lsweise bald nach der einen, bald nach der andern Seite.

§. 218.

Aufgabe. Die Zeit T zu bestimmen, in welcher
r Körper den Winkel GCI an der Axe zurücklegt, oder
essen Schwerpunkt aus seinem anfänglichen Orte G bis
seinem tiefsten Orte I herabsinkt.

Aufl. 1) Wenn man für ϑ^2 seinen Werth $\frac{d\Phi^2}{dt^2}$
ieder substituirt, und der Kürze wegen $\frac{2gf}{f^2+h^2} = \frac{1}{\varkappa^2}$
zt, so giebt die Formel (§. 216. 6.):

$$\varkappa^2 \cdot \frac{d\varphi^2}{dt^2} = 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi - 2\,\mathrm{Cos}\,\eta,$$

woraus man: $dt = \frac{-\varkappa d\varphi}{\sqrt{(2\,\mathrm{Cos}\,\varphi - 2\,\mathrm{Cos}\,\eta)}}$ erhält. Es muß hier nemlich von den beyden Wurzeln deshalb die negative genommen werden, weil der Winkel φ abnimmt, indem t wächst; also $d\varphi$ und dt einander entgegen gesetzt sind.

2) Nun ist $\mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Cos}\,\eta = 1 - \mathrm{Cos}\,\eta - (1 - \mathrm{Cos}\,\varphi) = 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\eta^2 - 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\varphi^2$; folglich $\sqrt{(2\,\mathrm{Cos}\,\varphi - 2\,\mathrm{Cos}\,\eta)} = 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\eta\,\sqrt{(1 - \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\varphi^2}{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\eta^2})}$. Setzt man daher $\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\varphi}{\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\eta} = \mathrm{Sin}\,\psi$, und noch zur Abkürzung $\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\eta = i$, so wird

$$\sqrt{(2\,\mathrm{Cos}\,\varphi - 2\,\mathrm{Cos}\,\eta)} = 2i\sqrt{(1 - \mathrm{Sin}\,\psi^2)} = 2i\,\mathrm{Cos}\,\psi.$$

3) Ferner bekommt man aus der Gleichung $\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\varphi = i\,\mathrm{Sin}\,\psi$ durchs Differenziiren $\frac{1}{2}\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\varphi d\varphi = i\,\mathrm{Cos}\,\psi d\psi$, also:

$$d\varphi = \frac{2i\,\mathrm{Cos}\,\psi d\psi}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\varphi} = \frac{2i\,\mathrm{Cos}\,\psi d\psi}{\sqrt{(1 - i^2\,\mathrm{Sin}\,\psi^2)}}.$$

4) Diese Werthe in den Zähler und Nenner von dt substituirt, geben: $dt = \frac{-\varkappa d\psi}{\sqrt{(1 - i^2\,\mathrm{Sin}\,\psi^2)}}$, oder, wenn man die Wurzelgröße in eine Reihe auflöst:

$dt = -\varkappa d\psi\,(1 + \frac{1}{2}i^2\,\mathrm{Sin}\,\psi^2 + \frac{3}{8}i^4\,\mathrm{Sin}\,\psi^4 + \frac{5}{16}i^6\,\mathrm{Sin}\,\psi^6 + \ldots)$ mithin:

$t = C - \varkappa\,[\psi + \frac{1}{2}i^2 \int \mathrm{Sin}\,\psi^2 d\psi + \frac{3}{8}i^4 \int \mathrm{Sin}\,\psi^4 d\psi + \ldots]$.

5) Für $t = o$ ist $\Phi = \eta$, also $\operatorname{Sin} \psi = 1$, oder $\psi = \frac{1}{2}\pi$, oder für $t = T$, $\Phi = o$, folglich auch $\psi = o$. Man braucht also hier nur von den in der Reihe vorkommenden Integralen die besonderen Werthe für $\psi = o$ und $\psi = \frac{1}{2}\pi$ zu wissen, zu denen man folgendermaßen gelangt:

6) Es ist $d . \operatorname{Sin} \psi^m \operatorname{Cos} \psi = m \operatorname{Sin} \psi^{m-1} \operatorname{Cos} \psi^2 d\psi - \operatorname{Sin} \psi^{m+1} d\psi$, und dies $= m \operatorname{Sin} \psi^{m-1} d\psi - (m+1) \operatorname{Sin} \psi^{m+1} d\psi$, indem man für $\operatorname{Cos} \psi^2$ seinen Werth $1 - \operatorname{Sin} \psi^2$ setzt. Wird nun auf beyden Seiten wiederum integrirt, so erhält man:

$$\operatorname{Sin} \psi^m \operatorname{Cos} \psi = m \int \operatorname{Sin} \psi^{m-1} d\psi - (m+1) \int \operatorname{Sin} \psi^{m+1} d\psi,$$

$$\text{also: } \int \operatorname{Sin} \psi^{m+1} d\psi = \frac{m}{m+1} \cdot \int \operatorname{Sin} \psi^{m-1} d\psi - \frac{\operatorname{Sin} \psi^m \operatorname{Cos} \psi}{m+1},$$

oder $m - 1 = 2n$ gesetzt:

$$\int \operatorname{Sin} \psi^{2n+2} d\psi = \frac{2n+1}{2n+2} \int \operatorname{Sin} \psi^{2n} d\psi - \frac{\operatorname{Sin} \psi^{2n+1} \operatorname{Cos} \psi}{2n+2}.$$

Daher hat man sowohl für $\psi = o$, als auch für $\psi = \frac{1}{2}\pi$

$$\int \operatorname{Sin} \psi^{2n+2} d\psi = \frac{2n+1}{2n+2} \int \operatorname{Sin} \psi^{2n} d\psi.$$

7) In dem einfachsten Falle $n = o$ ist nun $\operatorname{Sin} \psi^o d\psi = \int d\psi = \psi$, also wird dies Integral $= o$, wenn man darin $\psi = o$ setzt; mithin verschwinden für $\psi = o$ auch alle die übrigen Integrale $\int \operatorname{Sin} \psi^2 d\psi$, $\int \operatorname{Sin} \psi^4 d\psi$ u. s. w.

8) Dagegen iſt für $\psi = \frac{1}{2}\pi$

$$\int \operatorname{Sin}\psi^0 d\psi = \tfrac{1}{2}\pi,$$

folglich $\int \operatorname{Sin}\psi^2 d\psi = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi,$

$$\int \operatorname{Sin}\psi^4 d\psi = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\pi,$$

und überhaupt $\int \operatorname{Sin}\psi^{2n} d\psi = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{2}\pi$.

9) Für $\psi = 0$ erhält man demnach (4.) $T = C$, und für $\psi = \frac{1}{2}\pi$:

$$0 = C - \tfrac{1}{2}\pi\varkappa\,(1 + \tfrac{1}{4}i^2 + \tfrac{9}{16}i^4 + \tfrac{25}{256}i^6 \ldots + (\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\cdot\frac{2n-1}{2n})^2 i^{2n} + .)$$

Daher endlich:

$$T = \tfrac{1}{2}\pi\varkappa\,(1 + \tfrac{1}{4}\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\eta^2 + \tfrac{9}{16}\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\eta^4 + \tfrac{25}{256}\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\eta^6 + ..),$$ worin $\varkappa = \sqrt{(\frac{f^2+h^2}{2gf})}$ iſt.

§. 219.

Da der Schwerpunkt des Körpers in gleichen Abweichungen von der Vertikale einerley Geſchwindigkeit hat, alſo einerley Zeit gebraucht, um gleiche Elemente ſeines Weges, die auf beyden Seiten der Vertikale gleich weit von ihr entfernt ſind, zurückzulegen, ſo erhellet, daß auch die ganze Zeit, worin er durch den folgenden Bogen Ig aufwärts ſteigt, mit der gefundenen Zeit T ſeines Niederganges durch GI einerley ſeyn müſſe. Demnach iſt die Zeit, worin er den ganzen Bogen GIg beſchreibt, $= 2T$ (wie auch die allgemeine Formel (4) giebt, wenn man darin $\varphi = -\eta$, oder $\psi = -\frac{1}{2}\pi$ [illegible]), und endlich die Dauer einer ganzen Schwingung,

der die Zeit eines Hinganges durch Gg und Herganges durch gG zusammengenommen, = 4T.

§. 220.

Bey unendlicher Abnahme des Schwingungsbogens nähert sich die Zeit T unendlich der Grenze = $\pi\varkappa = \frac{1}{2}\pi\sqrt{(\frac{f^2+h^2}{2gf})}$. Für einen Schwingungsbogen von gegebener Größe ist daher T jederzeit um etwas größer, als $\frac{1}{2}\pi\varkappa$; wofern aber derselbe nur einigermaßen gering ist, beträgt der Ueberschuß doch so wenig, daß man ihn ohne Nachtheil der Genauigkeit in den meisten Fällen wird außer Acht lassen können. Wir wollen z. B. setzen, der Körper schwinge in einem Bogen $2\eta = 12°$, und für unendlich kleine Schwingungen desselben sey die Zeit $\pi\varkappa$ seines Hinganges durch Gg = 1 Sec., so wird

$\frac{1}{4}$ Sin $\frac{1}{2}\eta^2$ = 0,00068476
$\frac{9}{16}$ Sin $\frac{1}{2}\eta^4$ = ... 422

2T = 1,00068898″,

daß erst zwischen den Zeiten von 726 unendlich kleinen Schwingungen des Körpers, und solchen, die in dem Bogen von 12° geschehen, ein Unterschied von der ganzen Sekunde entsteht.

§. 221.

Diese genaue Uebereinstimmung in der Zeit der Schwingungen für kleine Bogen derselben leitet auf sehr leichte und einfache Methode, das Moment der

Trägheit eines Körpers für irgend eine durch sein
Fig. 29. Schwerpunkt G gehenden Axe AB durch V
suche zu bestimmen. Man hänge nemlich den Kör
an einer horizontalen Axe EF solchergestalt auf, daß
Linie AB ihr parallel zu liegen kommt, und messe
senkrechte Entfernung GC seines Schwerpunktes
dieser Axe; welche = f heißen mag. Hierauf bri
man den Körper unmerklich aus seinem Gleichgewi
so daß er um die Axe EF sehr kleine Schwingun
macht, und bestimme ihre Dauer mit möglichster
nauigkeit, wozu man ein Mittel aus einer beträchtli
Anzahl derselben nehmen muß. Es sey nun die b
achtete Zeit einer halben Schwingung = t, so hat
$t^2 = \pi^2 k^2 = \frac{\pi^2 (f^2 + h^2)}{2gf}$, also $h^2 = \frac{2gft^2}{\pi^2} -$
und das gesuchte Moment der Trägheit des Körpers
die Axe AB:

$$Mh^2 = M\left(\frac{2gt^2f}{\pi^2} - f^2\right).$$

Vom einfachen und zusammengesetzten Pen

§. 222.

Da die Dauer der kleinern Schwingungen ei
Körpers von der Größe des Schwingungsbogens un
hängig ist, und daher als unveränderlich angenom
werden kann, so hat sie alle Erfordernisse eines gena
und richtigen Zeitmaßes. Man nennt jeden Kör
der zu dieser Absicht an einer horizontalen Axe frey

hängt wird, ein **Pendel**, und die halbe Schwingung
ſelben, oder ſeine Umdrehung innerhalb des Winkel-
raumes GCg einen **Pendelſchlag**. Beym
Sekundenpendel, deſſen man ſich im gemeinen Leben und
n aſtronomiſchen Gebrauche am häufigſten bedient,
iert der Schlag genau eine Sekunde mittlerer Zeit.

§. 223.

Man nehme für das Pendel die Größen f und h^2
der vorigen Bedeutung, und ſetze die Dauer ſeines
hlags $= t$, ſo hat man für kleine Ausweichungen
elben:

$$t^2 = \frac{\pi^2 (f^2 + h^2)}{2gf} = \frac{\pi^2}{2g}\left(f + \frac{h^2}{f}\right).$$

Das Pendel mag daher eine ſo geringe körperliche
sdehnung haben, oder ſein Moment der Trägheit
h^2 ſo klein ſeyn, als man will, ſo kann man doch
mer bewirken, daß es ſeine Schläge in einer gege-
ien Zeit verrichten muß, wofern man nur ſeinen
hwerpunkt in die dazu nöthige Entfernung von der
e bringt.

§. 224.

Die bequemſte und vortheilhafteſte Geſtalt eines
ndels iſt ohne Zweifel diejenige, wobey es, ſeiner
aſſe unbeſchadet, den möglichſt kleinſten Raum ein-
mt, und der Luft, wegen ihres Widerſtandes, die
nigſte Fläche darbietet. Aus dieſem Grunde nimmt
n dazu gewöhnlich kleine Körperchen, die verhältniß-
ßig bey geringer Ausdehnung viel Maſſe enthalten,

als z. B. Kugeln von beträchtlichem ſpecifiſchen Gewichte, und verbindet ſolche mit der Umdrehungsaxe durch eine ſehr dünne, auf ſie ſenkrecht befeſtigte, Stange. Wäre es möglich, irgend ein Gewicht in einem einzigen Fig. 29. Punkte O zuſammen zu bringen, und dieſen Punkt an einem Faden CO aufzuhängen, der gar keine Dicke hätte, und in C angeheftet wäre, ſo entſtände daraus ein ganz unkörperliches oder einfaches Pendel, und man könnte dem Faden jederzeit eine ſolche Länge geben, daß der gedachte Punkt ſeine Schwingungen in einer beſtimmten Zeit vollendete.

§. 225.

Aufgabe. Das einfache Pendel ſoll mit einem körperlichen oder zuſammengeſetzten Pendel, wofür f und h gegeben ſind, gleichzeitige Schläge thun; man ſucht ſeine Länge OC = l.

Aufl. Es ſey die gemeinſchaftliche Dauer ihres Schlags = t, ſo iſt für das zuſammengeſetzte Pendel $t^2 = \frac{\pi^2}{2g}(f + \frac{h^2}{f})$, und für das einfache, weil da $h^2 = o$, $f = l$ iſt, $t^2 = \frac{\pi^2 l}{2g}$; mithin $l = f + \frac{h^2}{f}$.

§. 226.

Es giebt alſo in jedem Körper, der an einer horizontalen Axe frey aufgehängt iſt, einen Punkt O, deſſen Schwingungen um dieſe Axe mit denen des Körpers einerley Dauer haben würden, wenn er die ganze Maſſe deſſelben in ſich vereinigte. Man erhält ihn nemlich, wenn

nn man aus dem Schwerpunkte G auf die Axe das erpendikel GC zieht, und darauf CO = der Länge s einfachen Pendels nimmt, das mit dem Körper leichzeitige Schwingungen macht. Dieser Punkt ißt der **Schwingungspunkt** oder **Mittelpunkt er Schwingung** des Körpers.

§. 227.

1. Der Schwingungspunkt des Körpers liegt jerzeit in der Linie CG über den Schwerpunkt hinaus, nd zwar in einer Entfernung von demselben GO = l = f = $\frac{h^2}{f}$. Daher läßt sich sein Ort leicht bestimmen, ofern man das Moment der Trägheit des Körpers für ie, durch seinen Schwerpunkt gehende, mit der Umrehungsaxe parallele Linie anzugeben weiß.

2. Hat man auf solche Art von einem zusammenesetzten Pendel den Mittelpunkt der Schwingung, oder ie Entfernung OC = l bereits gefunden, so erhält man araus unmittelbar die Zeit seines Schlages t = $\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$ §. 223.); wodurch also die Bestimmung des Pendelhlags auf die des Schwingungspunktes zurückgeführt ird.

§. 228.

Aufgabe. Es sey das Pendel aus mehreren einachen Stücken zusammengesetzt, deren Schwerpunkte emeinschaftlich in einer, auf die Umdrehungsaxe senkechten, geraden Linie liegen; man sucht seinen Schwingungspunkt.

Aufl. Man ſetze die Maſ-
ſen dieſer einzelnen Stücke $= m, m', m''$ u. ſ. f.
die Entfernungen ihrer
Schwerpunkte von der Axe $= x, x', x''$ u. ſ. w.
ihre Momente der Trägheit
für die, durch ihre Schwer-
punkte gehenden, mit der
Axe parallelen, Linien $= mu^2, m'u'^2, m''u''^2$ u.
ſo iſt

1) die Entfernung ihres gemeinſchaftlichen Sc
punktes von der Axe

$$f = \frac{mx + m'x' + m''x'' + \ldots}{m + m' + m'' + \ldots},$$

oder, wenn wir die ganze Maſſe des Pendels M ne

$$Mf = mx + m'x' + m''x'' + \ldots.$$

2) Ferner ſind die einzelnen Momente der
heit dieſer Maſſen in Bezug auf die Schwingun
$= m(x^2 + u^2)$, $m'(x'^2 + u'^2)$, $m''(x''^2 +$
u. ſ. w. Daher iſt das Moment der Trägheit des
zen Pendels für dieſe Axe:

$$M(f^2 + h^2) = m(x^2 + u^2) + m'(x'^2 + u'^2) + m''(x''^2 +$$

und folglich der Abſtand eines Schwingungspu
von derſelben

$$l = \frac{M(f^2 + h^2)}{Mf} = \frac{m(x^2 + u^2) + m'(x'^2 + u'^2) + m''(x''^2 + u''}{mx + m'x' + m''x'' + \ldots}$$

§. 229.

Exempel I. Das Pendel beſtehe aus einer
driſchen Ruthe, und in einer, an ihrem Endpunk
feſtigten, Kugel. Das Gewicht der Ruthe ſey:

e Länge = a, ihre halbe Dicke = i; das Gewicht Kugel = M, ihr Halbmeſſer = e; ſo hat man für ere $x = \frac{1}{2}a$, $u^2 = \frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{4}i^2$ (§. 209. 2.), x^2 $u^2 = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{4}i^2$, und für letztere $m' = M$, $x' = + e$, $u'^2 = \frac{2}{5}e^2$ (§. 212. 2.), alſo:

$$l = \frac{M[(a+e)^2 + \frac{2}{5}e^2) + \frac{1}{3}m(a^2 + \frac{3}{4}i^2)}{M(a+e) + \frac{1}{2}ma}.$$

§. 230.

Exempel II. Die Pendelſtange ſey ein rechtwink- ɔtes Parallellepipedum; ihre Maſſe = m, Länge = a, reite = i; das darangebrachte Gewicht M eine Lin- die aus zweyen gleichen und ähnlichen Kugelſegmen- beſteht; die Dicke derſelben = 2e, ihre Breite oder urchmeſſer = 2b, ſo erhält man

1) für den Halbmeſſer der zu den Seiten der Linſe ɔörigen Kugel, welcher c heißen mag: $(c - e)^2 +$ $= c^2$, alſo $c = \frac{b^2 + e^2}{2e}$.

2) Der Schwerpunkt der Linſe fällt in die ge- inſchaftliche Grundfläche ihrer beyden Hälften, und gleich in die centrale Axe derſelben, folglich in den ittelpunkt der gedachten Fläche; daher wird $x' =$ $+ b$.

3) Das Moment der Trägheit der Linſe für ihre ɔmetriſche Axe, die auf der Schwingungsfläche ſenk- ht, alſo mit der Umdrehungsaxe parallel iſt, wird rch eben die Formel (§. 212. 1.) ausgedrückt, die) auf das einfache Kugelſegment bezieht; denn es iſt

doppelt so groß, als das Moment der Trägheit des letztern, aber dagegen auch die Masse der Linse doppelt so groß, als die des einfachen Segmentes. Setzt man daher in jener Formel $a = \frac{b^2 + e^2}{2e}$, $x = e$, so bekommt man

$$u'^2 = \frac{10b^4 + 5b^2e^2 + e^4}{30b^2 + 10e^2}.$$

4) Für die Pendelstange ist endlich $x = \frac{1}{2}a$, $u^2 = \frac{1}{12}(a^2 + i^2)$ (§. 209. 1.) $u^2 + x^2 = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{12}i^2$; mithin wird

$$l = \frac{M[(a+b)^2 + \frac{10b^4 + 5b^2e^2 + e^4}{30b^2 + 10e^2}] + \frac{1}{3}m(a^2 + \frac{1}{4}i^2)}{M(a+b) + \frac{1}{2}ma}.$$

Anmerk. Bestehen die beyden Stücke des Pendels nicht aus einerley Materie, so kommt noch in Betracht, daß ein Theil der Pendelstange in der Linse enthalten ist. Diesen Fall betrachtet Herr Bohnenberger in seiner Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung §. 100.

§. 231.

Exempel III. An einer cylindrischen Ruthe, deren Masse $= m$, Länge $= a$, und halbe Dicke $= i$ ist, sey ein doppeltes Kegelsegment senkrecht befestigt, so daß dessen centrale Axe in die Verlängerung der Ruthe hineinfällt. Sein Gewicht sey $= M$, der Halbmesser seines mittlern Querschnittes $= b$, der Halbmesser der obern oder untern Grundfläche $= c$, und seine Höhe $= 2e$; man sucht den Schwingungspunkt dieses Pendels.

1) Da der Schwerpunkt des doppelten Kegelsegments in den Mittelpunkt seines mittlern Querschnittes

fällt, so hat man für dessen Entfernung von der Schwingungsaxe $x' = a + e$.

2) Um ferner sein Moment der Trägheit für den Durchmesser dieses Querschnittes zu finden, darf man nur dasselbe von dem einfachen Kegelsegmente suchen, und für dessen Masse das ganze Gewicht substituiren. Zu dem Ende sey die Masse des dazu gehörigen vollständigen Kegels $= G$, die des abgeschnittenen Stückes $= F$; die Höhe des erstern $= g$, des letztern $= f$; so ist das Moment der Trägheit des ganzen Kegels für die durch seinen Schwerpunkt gehende Queraxe $= \frac{3}{20} G (b^2 + \frac{1}{4} g^2)$ (§. 214. 3.). Dazu $\frac{1}{10} Gg^2$ addirt, giebt dasselbe für den Durchmesser der Grundfläche $= \frac{1}{10} G (3b^2 + 2g^2)$.

3) Auf gleiche Weise ist das Moment der Trägheit des fehlenden Kegels für die durch seinen Schwerpunkt gehende Axe $= \frac{3}{20} F (c^2 + \frac{1}{4} f^2)$, und folglich für den Durchmesser der eben gedachten Querfläche, indem man noch $F (\frac{1}{4} f + e)^2$ hinzufügt, $= \frac{1}{20} F (3c^2 + 2f^2) + \frac{1}{2} F (ef + 2e^2)$, oder, da $F = \frac{c^3}{b^3} . G$, und $f = \frac{cg}{b}$ ist,

$$= \frac{c^5 G}{20 b^5} (3b^2 + 2g^2) + \frac{1}{2} F (ef + 2e^2).$$

4) Dies von dem erstern subtrahirt, bleibt das Moment der Trägheit des abgekürzten Kegels für eben die Axe

$$= \frac{1}{20} G \left(1 - \frac{c^5}{b^5}\right) (3b^2 + 2g^2) - \frac{1}{2} F (ef + 2e^2)$$

und wenn wir jetzt unter F und G das Doppelte derſelben verſtehen, ſo drückt dieſe Formel zugleich das Moment der Trägheit des doppelten Kegelſegments für die durch ſeinen Schwerpunkt gehende Zwergaxe aus.

5) Dies vorausgeſetzt, iſt $M = G - F = G\left(1 - \frac{c^3}{b^3}\right)$, alſo $G = \frac{b^3 M}{b^3 - c^3}$, $F = \frac{c^3 M}{b^3 - c^3}$; ferner $e = g - f = \left(1 - \frac{c}{b}\right) g$, $g = \frac{be}{b-c}$, $f = \frac{ce}{b-c}$; wodurch ſich die Formel in folgende verwandelt:

$$\tfrac{1}{16} M \frac{(b^5 - c^5)}{b^3 - c^3} \cdot \left[3 + \frac{2e^2}{(b-c)^2}\right] - \tfrac{1}{2} M \frac{c^3 e^2}{b^3 - c^3} \cdot \left(\frac{2b-c}{b-c}\right).$$

6. Werden noch darin die beyden letztern Theile vom erſtern getrennt, und in eins zuſammengezogen, ſo erhält man endlich:

$$u'' = \frac{3(b^5 - c^5)}{20(b^3 - c^3)} + \frac{b^2 e^2 (b+2c)}{10(b^3 - c^3)} + \frac{3c^2 e^2 (b-2c)}{10(b^3 - c^3)}.$$

7) Für die cylindriſche Ruthe iſt $x = \frac{1}{2}a$, $x^2 + u^2 = \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{4}i^2$; mithin wird:

$$l = \frac{M\left[(a+e)^2 + u''\right] + \frac{1}{3}m\left(a^2 + \frac{3}{4}i^2\right)}{M(a+e) + \frac{1}{2}ma}.$$

§. 232.

Aus der Formel $t = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$, für die Dauer der halben Schwingung eines einfachen Pendels, deſſen Länge $= l$ iſt (§. 227. 2.), wird gegenſeitig

$$l = \frac{2gt^2}{\pi^2}.$$

Kennt man nun die Länge des einfachen Pendels, das Sekunden ſchlägt $= L$, ſo erhält man für $t = 1$

$$L = \frac{2g}{\pi^2}.$$

Dies ſtatt $\frac{2g}{\pi^2}$ in die vorige Formel geſetzt, giebt $l = t^2 L$; woraus $t = \sqrt{\frac{l}{L}}$ wird.

Weiß man alſo die Länge des einfachen Sekundenpendels, ſo findet man daraus für jedes zuſammengeſetzte Pendel die Zeit ſeines Schlages in Sekunden, wenn man die Entfernung ſeines Schwingungspunktes von der Axe durch jene Länge dividirt, und aus dem Quotienten die Quadratwurzel zieht.

§. 233.

Zu den Verſuchen, die Länge des einfachen Sekundenpendels zu beſtimmen, bedient man ſich gewöhnlich kleiner Gewichte, die entweder die Geſtalt einer Kugel, oder eines doppelten Kegelſegmentes haben, und nimmt ſtatt der Pendelſtange einen ſehr dünnen Faden, woran man ſie in kleinen Bogen ſchwingen läßt. Hat man nun beobachtet, wie viel Schläge ein ſolches Pendel in einer geraumen Zeit verrichtet, ſo kann man daraus mit vieler Genauigkeit einen mittleren Werth t für die Dauer eines einzelnen Schlages beſtimmen; und wird alsdann noch aus den gegebenen Abmeſſungen des Pendels nach obigen Formeln (§. 228. u. f.) der Abſtand ſeines Schwingungspunktes vom Aufhängepunkte

$= l$ hergeleitet, so ergiebt sich aus den beyden Gröſsen t und l die Länge des einfachen Sekundenpendels $L = \frac{l}{t^2}$ (§. 231.).

§. 234.

Da ein solches Pendel in seiner Form dem einfachen ziemlich nahe kommt, so ist leicht vorauszusehen, daß der Abstand zwischen dem Schwerpunkte des Gewichtes und dem Aufhängepunkte, den wir f nennen wollen, von der zu findenden Länge l sehr wenig verschieden seyn müsse, und folglich, um letztere daraus zu erhalten, nur einer geringen Korrektion bedürfe. Daher läßt sich die Formel §. 229. für gegenwärtigen Fall noch weit einfacher, und zum Gebrauche bequemer einrichten, ohne daß die erforderliche Genauigkeit dadurch verletzt wird. Zuvörderst erhält man nemlich, wenn man $a + e = f$ setzt, und die halbe Dicke des Fadens als unbedeutend wegläßt:

$$l = \frac{M(f^2 + \frac{2}{5}e^2) + \frac{1}{3}m(f-e)^2}{Mf + \frac{1}{2}m(f-e)},$$

und da auch gewiß m und e allemal so gering sind, daß man m^2 gegen M^2, und em gegen fM vernachläßigen kann, so wird ferner;

$$l = [f + \frac{2e^2}{5f} + \frac{m(f-e)^2}{3Mf}][1 - \frac{m(f-e)}{2Mf}]$$

$$= f + \frac{2e^2}{5f} - \frac{m(f+e)}{6M}.$$

Man nenne noch das Gewicht des Fadens für 1 Fuß

Länge = K; dies giebt $m = K(f-e)$; oder, wenn f und e in Linien bestimmt werden, wie das hierbey gewöhnlich geschieht, $m = \frac{K(f-e)}{144}$; also wird das letzte Glied $= \frac{K(f^2-e^2)}{864M}$, worin man e^2 gegen f^2 weglassen kann; mithin:

$$l = f + \frac{2e^2}{5f} - \frac{Kf^2}{864M}.$$

§. 235.

Wir wollen von dieser Formel auf die erstern drey von Herrn Mairans bekannten Versuche *), zu denen allein die nöthigen Data angeführt sind, eine Anwendung machen. Für den Aloefaden (file de pite), dessen er sich dabey bediente, finde ich K = 0,11 Gran. Das Uebrige ist aus nachfolgender Tafel zu ersehen:

Rad. der Kugel e in Linien.	Gew. M in Gran.	Länge f	Zeit der Beob. in Sekund.	Anzahl der Schl.
3,42	400	860,16	1397	1000
6,13	1707	439,97	2840	2842
6,13	1707	442,40	6810	6796

Zur Vermeidung aller Weitläuftigkeit will ich die Rechnung bloß für den dritten Versuch, der nach seinem Zeugnisse von allen der genaueste ist, hersetzen:

$\log 4e^2 = 2{,}1769810$

davon $\log 10f = 3{,}6458151$

bleibt $0{,}5311659 - 2$

*) Mem. de l'acad. 1735 pag. 183 u. f.

die Vertikale CD, und in der dadurch entstehenden vertikalen Ebene ACD die Linie CI ebenfalls auf AB senkrecht; so ist die ganze Ebene MCI auf AB senkrecht, und es liegt also in ihr der Bogen, den der Schwerpunkt bey der Umdrehung des Körpers um C beschreibt.

2) Man zerlege sein Gewicht M, das aus M nach der Vertikale Mv wirkt, in eine Kraft nach Mp, parallel CI, und in eine darauf senkrechte, deren Richtung also mit der Axe AB parallel ist. Von ersterer, = M Cos pMv = M Cos DCI = M Cos I, fällt die Richtung in die Umdrehungsebene; von letzterer hingegen, = M Sin I, steht sie auf jener Ebene senkrecht, woraus erhellet, daß diese Kraft zur Umdrehung des Körpers nichts beytragen könne.

3) Man zerlege noch die Kraft M Cos I in eine nach der Verlängerung von CM, und in eine auf CM senkrechte. Erstere, = M Cos I Cos MCI verwandelt sich ebenfalls in einen bloßen Druck, weil ihre Richtung durch die Axe geht; letztere, = M Cos I Sin MCI wird dagegen ganz auf die Beschleunigung der Rotation des Körpers verwandt.

4) Nennt man daher, wie im §. 216., die Entfernung CM = f, die Abweichung dieser Linie von der vertikalen Ebene, oder von CI, in der jetzigen Lage des Schwerpunktes = φ, ihren anfänglichen Abstand von CI = α, die Winkelgeschwindigkeit des Körpers in diesem Augenblicke = ϑ, sein Moment der Trägheit durch M gehende, mit AB parallele,

Axen

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2gfM \operatorname{Cos} I \operatorname{Sin} \varphi}{M(f^2+h^2)} = \frac{2gf \operatorname{Cos} I \operatorname{Sin} \varphi}{f^2+h^2},$$

$$\text{oder } \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{-2gf \operatorname{Cos} I \operatorname{Sin} \varphi}{f^2+h^2}.$$

5) Dieſe Gleichung, wie im §. 216. behandelt, und $\frac{2gf}{f^2+h^2} = \frac{1}{\varkappa^2}$ geſetzt, giebt:

$$dt = \frac{-\varkappa \operatorname{Sec} I \cdot d\varphi}{\sqrt{(2 \operatorname{Cos} \varphi - 2 \operatorname{Cos} \eta)}}.$$

6) Für den Fall, wo die Axe horizontal, oder $I = o$ iſt, verwandelt ſich die Formel in die gewöhnliche: $dt = -\frac{\varkappa d\varphi}{\sqrt{(2 \operatorname{Cos} \varphi - 2 \operatorname{Cos} \eta)}}$. Nennt man alſo die Zeit, worin der Körper den Winkel $\eta - \varphi$ an der horizontalen Axe zurücklegen würde, $= T$, ſo wird:

$dt : dT = \operatorname{Sec} I : 1$ oder

$dt = d$ [illegible]

alſo $t =$ [illegible]

[illegible] man beyde

[illegible]blicke anrech-

[illegible]chen Winkel η

[illegible]n Schwingung

$\sqrt{(\frac{f^2+h^2}{}}$ [illegible]).

[illegible]ſeine

Axe aus der horizontalen Lage in irgend eine inclinirte gebracht wird, und zwar verhält sich die Zeit seines Schlages verkehrt wie der Kosinus des Neigungswinkels seiner Axe gegen den Horizont. Man sieht hieraus, daß zum richtigen Gange einer Pendeluhr durchaus erforderlich sey, daß die Axe des Pendels beständig horizontaler Lage, oder die Uhr selbst in vertikaler Stellung bleibe; daher eine solche Uhr auf beweglichem Boden, z. B. auf dem Schiffe, nicht gebraucht werden kann.

Betrachtung einer zusammengesetzten Maschine, die eine oder mehrere feste Axen hat.

§. 240.

Wenn die Masse M zwar an sich um eine feste Axe beweglich ist, aber dabey noch mit andern Massen in einer solchen Verbindung steht, daß diese durch ihre Umdrehung zugleich mit in eine drehende oder auch fortrückende Bewegung gesetzt werden, so ist die einfache Formel (§. 200.) zur Bestimmung ihrer Winkelgeschwindigkeit allein nicht hinreichend, weil alsdann ein Theil der Kraft, die sie zu drehen strebt, auf die Bewegung der übrigen Massen verwandt werden muß. Indeß läßt sich der Gebrauch der gedachten Formel doch auch auf diesen zusammengesetzteren Fall ausdehnen, wofern man nur nach der im fünften Kapitel vorgetragenen Methode das Gesetz der ganzen Bewegung auf das Gleichgewicht zurückzuführen sucht.

Man setze zu dem Ende das Moment der Trägheit

r Masse M in Ansehung ihrer Umdrehungsaxe = Mh^2; ihre noch unbekannte Winkelgeschwindigkeit für ne gegebene Zeit $t = \vartheta$; das statische Moment der raft, die ihr diese Geschwindigkeit während der Zeit ertheilt haben würde, wenn sie mit den andern Massen i keiner Verbindung stände, = Vf, so hat man:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2gfV}{Mh^2}, \text{ also}$$

$$Vf = \frac{Mh^2}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Wenn man nun auf gleiche Art für jede der übrien Massen die Kraft zu bestimmen sucht, wodurch ihr, enn sie allein vorhanden wäre, eben die Bewegung erheilt würde, die sie in jetzigem Zusammenhange mit n andern Massen wirklich bekommt, so müssen alle iese einzelnen virtuellen Kräfte an ihren Stellen den gegebenen Kräften, die das ganze System von Massen igentlich in Bewegung setzen, in einerley Zeitpunkte quipollent seyn, und folglich, nach entgegengesetzter Richtung angebracht, ihnen das Gleichgewicht halten.

Ich will diesen Satz, der an sich klar ist, aber in er Anwendung dem angehenden Mechaniker Schwieigkeiten machen könnte, durch einige besondere Fälle rläutern.

§. 241.

Aufgabe. Um eine cylindrische Welle schlingt sich in Seil, wovon das eine Ende auf ihrem Umfange beestigt, das andere von ihm herabgeleitet ist, mehrere

male herum. An letzteres Ende wird ein Gewicht P g
hängt, das also, indem es niedersinkt, das Seil v
der Welle abwickelt, und sie dadurch im Umlauf brin
Man sucht sowohl das Fortrücken der Last, als d
Drehen der Welle.

Aufl. Es sey der Halbmesser des Cylinders = a
seine Masse = M; also sein Moment der Trägheit f
seine Axe = $\frac{1}{2}Ma^2$. Ferner sey nach Verlauf eine
Zeit t seine Winkelgeschwindigkeit = ω, ihre Aend
rung im nächsten $dt = d\omega$; so ist

1) das Moment der Kraft, die eben die Aenderung
in der Umdrehung des Cylinders hervorbrächte, wenn a
mit der Last P nicht behängt wäre, $= \frac{Ma^2}{4g} \cdot \frac{d\omega}{dt}$.

2) Da die Last P um so viel herabsinkt, als das
Stück des Seiles beträgt, das sich in eben der Zeit von
der Welle abwickelt, so ist ihre Geschwindigkeit $v = a\omega$,
nemlich so groß, als die eines Punktes in dem Um
fange der Welle; und ihr augenblicklicher Zuwachs dv
$= a d\omega$.

3) Daher die Kraft, die die Masse P eben so be
schleunigen würde, wenn sie frey wäre, $= \frac{Pdv}{2gdt} =$
$\frac{Pa}{2g} \cdot \frac{d\omega}{dt}$, und ihr Moment gegen die Axe der Welle =
$\frac{Pa^2}{2g} \cdot \frac{d\omega}{dt}$.

4) Die beyden Kräfte (1 und 3) wirken in Ver
bindung eben so auf Welle und Last, als das Gewicht

r letztern, das allein die ganze Bewegung verursacht, ind sind ihm also in jedem Zeitpunkte der Bewegung quipollent. Folglich müssen sie, nach entgegengesetzter Richtung angebracht, ihm an der Axe das Gleichgewicht halten; wodurch zwischen den Momenten dieser drey Kräfte folgende Gleichung entsteht:

$$\frac{Ma^2}{4g}\cdot\frac{d\gamma}{dt}+\frac{Pa^2}{2g}\cdot\frac{d\gamma}{dt}=Pa$$

5) Demnach wird $\frac{d\gamma}{dt}=\frac{4gP}{(2P+M)a}$, und

$$v=\frac{4gPt}{2P+M}.$$

Die Last sinkt also mit gleichförmig beschleunigter Bewegung herab; nur langsamer, als in dem Falle, wenn die Trägheit der Welle nicht in Betracht käme.

§. 242.

Zu eben dem Resultate wird man auch noch durch folgende Betrachtung geleitet:

Wäre die Bewegung der Masse P gleichförmig, so drehete sich auch der Cylinder gleichförmig, und es gehörte folglich keine Kraft dazu, ihn in dieser gleichförmigen Umdrehung zu unterhalten. Da aber ihre Geschwindigkeit v im folgenden Zeittheile dt den Zuwachs dv bekommt, so entsteht dadurch auch in der Winkelgeschwindigkeit des Cylinders eine Aenderung $\frac{dv}{a}=d\gamma$, und diese muß nothwendig die Masse P

durch einen Theil ihres Gewichtes bewirken. Es sey dieser = W, so hat man:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2gWa}{\frac{1}{2}Ma^2} = \frac{4gW}{Ma}, \text{ mithin}$$

$$W = \frac{Mad\vartheta}{4gdt} = \frac{Mdv}{4gdt}.$$

Die Masse P wird also nur noch durch den übrigen Theil P — W ihres Gewichtes beschleunigt, und es ist daher:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2g(P-W)}{P}, \text{ oder } \frac{Pdv}{2gdt} = P - W = P - \frac{Mdv}{4gdt},$$

folglich $\frac{dv}{dt} = \frac{4gP}{2P+M}$, $v = \frac{4gPt}{2P+M}$, wie vorhin.

§. 243.

1. Das Seil spannt sich offenbar mit eben der Kraft, die zur Beschleunigung der Rotation des Cylinders verwandt wird, oder seine Spannung ist = W

$$= P\left(1 - \frac{dv}{2gdt}\right).$$

2) Diese Kraft, und das Gewicht M des Cylinders, bewirken also gemeinschaftlich einen vertikalen Druck der Zapfen auf ihre Lager = W + M, wodurch an dem Umfange derselben die Friktion = λ (W + M) entsteht, die, wenn wir den Halbmesser der Zapfen = e nennen, gegen die Axe das Moment = λe (W + M) hat.

3. Soll demnach bey dieser Bewegung die Friktion zugleich mit in Betracht gezogen werden, so kommt letzteres Moment noch zu den übrigen, in der Gleichung

§. 241. 4.) linkerhand befindlichen, Momenten hinzu, und es wird daher:

$$\frac{ad\upsilon}{4gdt}(2P+M)+\lambda e[M+P(1-\frac{d\upsilon}{2gdt})]=Pa,$$

woraus $\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{4g[Pa-\lambda e(P+M)]}{(2a+\lambda e)P+Ma}$ folgt.

§. 244.

Aufgabe. An den Umfängen eines Rades und seiner Welle hängen die Massen P und Q, die diese Maschine nach entgegengesetzten Richtungen umzudrehen streben. Erstere Masse, an dem Rade, hat das Uebergewicht, und zieht die letztere aufwärts; man fragt nach der Bewegung, die beyde dadurch bekommen.

Fig. 14. **Aufl.** Es sey der Halbmesser des Rades AC $= a$, der Welle $Bc = b$; das Moment der Trägheit der Maschine in Ansehung der Umdrehungsaxe $= Mh^2$; ihre Winkelgeschwindigkeit für eine gegebene Zeit $t = \omega$; die Aenderung derselben im nächsten $dt = d\omega$; so ist

1) das Moment der Kraft, die in eben dem Zeittheile dt diese Aenderung hervorbringen würde, wenn die Maschine frey wäre $= \frac{Mh^2}{2g} \cdot \frac{d\omega}{dt}$,

2) Die Geschwindigkeit υ der Masse P nach der Richtung AM ist $= a\omega$; also die Kraft, wodurch sie in nächsten dt um $d\upsilon$ wachsen würde, wenn sich die Masse im abgesonderten Zustande befände, $= \frac{Pd\upsilon}{2gdt}$

$= \frac{Pa}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$, und ihr Moment gegen die Axe $= \frac{Pa^2}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$.

3) Die Geschwindigkeit u der Masse Q nach der Richtung NB ist $= b\vartheta$, mithin die erforderliche Kraft sie um $du = bd\vartheta$ zu vermehren $= \frac{Qdu}{2gdt} = \frac{Qb}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$ und ihr Moment $= \frac{Qb^2}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$.

4) Diese drey Kräfte bringen also in Verbindung eben die Wirkungen hervor, als die Gewichte P und und müssen also, nach entgegengesetzten Richtung oder nach der gemeinschaftlichen Richtung MA, die Maschine angebracht, diesen das Gleichgewicht ten. Dem zufolge entsteht zwischen ihren Momen die Gleichung:

$$Pa = Qb + \frac{d\vartheta}{2gdt}(Pa^2 + Qb^2 + Mh^2),$$

mithin wird: $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2g(Pa - Qb)}{Pa^2 + Qb^2 + Mh^2}$,

woraus sich die Geschwindigkeiten v und u der bey Massen P und Q unmittelbar ergeben.

§. 245.

1. Die Masse P wird durch ihr Gewicht, das e falls $= P$ ist, herabwärts getrieben: sinkt aber nur einer Kraft $= \frac{Pdv}{2gdt}$, und wird also durch die K

$P\left(1-\frac{dv}{2gdt}\right)$ zurückgehalten; folglich das Seil, woran sie befestigt ist, mit eben der Stärke gespannt.

2. Die Masse Q steigt dagegen mit einer Kraft $=\frac{Qdu}{2gdt}$ aufwärts. Also hat das Seil, woran sie hängt, nicht allein ihr ganzes Gewicht zu tragen, sondern auch noch die Masse selbst mit jener Kraft hinaufzuziehen, und seine Spannung ist daher $=Q\left(1+\frac{du}{2gdt}\right)$.

3. Durch die beyden Spannkräfte, so wie durch das Gewicht M der Maschine, entsteht also ein vertikaler Druck der Zapfen gegen ihre Lager $=M+P+Q-\frac{d\vartheta}{2gdt}(Pa-Qb)$, und daraus ein Widerstand der Reibung, der gegen die Axe das Moment

$$\lambda e\left[P+Q+M-\frac{d\vartheta}{2gdt}(Pa-Qb)\right]$$

hat, wenn wiederum der Halbmesser des Zapfen e genannt wird.

4. Man bekommt also jetzt statt der Gleichung §. 244. 4. folgende:

$$Pa=Qb+\lambda e(P+Q+M)+\frac{d\vartheta}{2gdt}[Pa^2+Qb^2+Mh^2-\lambda e(Pa-Qb)]$$

und daraus

$$\frac{d\vartheta}{2gdt}=\frac{Pa-Qb-\lambda e(P+Q+M)}{Pa^2+Qb^2+Mh^2-\lambda e(Pa-Qb)}$$

§. 246.

Hängen die beyden Maſſen P und Q an einem g… meinſchaftlichen Seile, das über eine Rolle geht, ſo h… man b = a, und für beyder Geſchwindigkeit $v = a\vartheta$. Daher wird in dieſem Falle

$$v = \frac{2gt\,.\,[(P-Q)\,a - \lambda e\,(P+Q+M)]}{(P+Q+\frac{1}{2}M)\,a - \lambda e\,(P-Q)}$$

und, wenn man den Raum, durch den die Maſſe P in der Zeit t herabſinkt, oder Q heraufſteigt, = x nennt:

$$x = \tfrac{1}{2}\,vt.$$

Da die Friktion, wie jeder andere Widerſtand, kein Gleichgewicht aufhebt, ſondern vielmehr die Grenzen, zwiſchen denen es ohne ſie ſtatt finden würde, weiter ausdehnt; ſo folgt von ſelbſt, daß ſich die Formel nur anwenden laſſe, wofern die Bewegung möglich, alſo $P - Q > \frac{\lambda e}{a}\,(P+Q+M)$ iſt. Widrigenfalls würde man die Friktion als aktive Kraft anſehen, wo ſie bloß verhindert, daß die Bewegung wirklich erfolge.

Iſt nun aber $P - Q > \frac{\lambda e}{a}\,.\,(P+Q+M)$, ſo hat ſie offenbar einen deſto beträchtlichern Einfluß auf die Bewegung, je größer jede der beyden Maſſen P und Q an ſich, und je kleiner ihr Unterſchied iſt; woraus erhellet, daß ſich ihr Koefficient λ durch Verſuche mit Gewichten, die dazu vortheilhaft gewählt ſind, mit vieler Genauigkeit beſtimmen laſſen müſſe. Zu dem Ende er…

ilt man aus vorhergehender Formel, wenn man da- n den Fallraum x als gegeben anſieht:

$$\lambda = \frac{a}{e} \cdot \frac{gt^2(P-Q) - x(P+Q+\frac{1}{2}M)}{gt^2(P+Q+M) - x(P-Q)}.$$

§. 247.

Exempel. Bey den Verſuchen, die uns Herr Schober in ſeiner Theorie der Ueberwucht mitgetheilt at, war der vorgezeichnete Fallraum $x = 54$ pariſ. uß; die Rolle hatte $2\frac{1}{6}$ Zoll im Durchmeſſer, und og ſammt ihrer ſtählernen Axe, die auf geröſtetem orn lief, und $\frac{1}{12}$ Zoll dick war, $1\frac{3}{8}$ Loth. Die bey- n Gewichte hingen an einer Schnur ohne Ende, 8 oth ſchwer, wovon ſich alſo auf verſchiedenen Seiten r Rolle beſtändig gleiche Hälften befanden. Das einere Gewicht betrug 64 Loth; dazu das Gewicht der lben Schnur addirt, giebt $Q = 68$ Loth. Das Ue- ige erſieht man aus folgender Tafel:

Gewicht P in Loth $= 69\frac{1}{2}$	70	$70\frac{1}{2}$	71	$71\frac{1}{2}$	72
Beob. Zeit t in Sec. $= 31$	23	18	15	14	13

Was den erſten Verſuch betrift, ſo wird:

$$\log . gt^2 = 4{,}1616372$$
$$\log . (P+Q+M) = 2{,}1426242$$
$$\log . gt^2(P+Q+M) = 6{,}3042614$$
$$gt^2(P+Q+M) = 2014935$$
$$x(P-Q) = 81$$
$$\text{Nenner} = 2014854$$
$$\text{deſſen Log.} = 6{,}3042436$$

die Laſt mit dem Rade in keiner Verbindung, und wäre bloß als träge Maſſe anzuſehen, ſo gehörte zu ihrer Bewegung eine Kraft $= \frac{Pb}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$, und dieſe hätte gegen die Axe das Moment $= \frac{Pb^2}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$.

4) Da die Stelle des Menſchen unveränderlich dieſelbe bleibt, ſo bedürfte es, um ſeine körperliche Maſſe daſelbſt in Ruhe zu laſſen, gar keiner Kraft; daher iſt zu ihrer Bewegung, wenn wir ſie nus als frey und ohne Gewicht denken, die erforderliche Kraft $= o$.

5) Die Kräfte, die das Rad wirklich in Bewegung ſetzen, ſind: Das Gewicht des Menſchen $= G$, und die Laſt P; ihre Momente gegen die Axe $= Ga \sin \eta$, und Pb. Werden nun zu dieſen Kräften die erſtern beyden (2. 3.) nach entgegengeſetzten Richtungen hinzugefügt, und die Momente derer, die das Rad nach einerley Seite zu drehen ſtreben, zuſammenaddirt, ſo entſteht die Gleichung:

$$Ga \sin \eta = Pb + \frac{d\vartheta}{2gdt}(Pb^2 + Mh^2).$$

6) Dieſe giebt: $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2g\,(Ga \sin \eta - Pb)}{Pb^2 + Mh^2}$,

woraus dann das Uebrige leicht gefunden wird.

§. 249.

Will man hierbey zugleich die Friktion in Rechnung bringen, ſo geſchieht dies folgendermaßen:

1) Die Spannung des Seiles, woran die Laſt

ängt, iſt $= (1 + \frac{bd\gamma}{2gdt})P$. Durch den Theil P der-
elben wird nemlich die Geſchwindigkeit der Laſt $v = b\gamma$
loß erhalten; durch den andern Theil $\frac{Pbd\gamma}{2gdt}$ hinge-
gen, wird ſie in jedem folgenden Augenblicke um $dv =$
$bd\gamma$ vermehrt.

2) Dieſe Spannung, nebſt den Gewichten G und M des Menſchen und der Maſchine, bewirken zuſammen einen vertikalen Druck der Zapfen gegen die Lager $= P(1 + \frac{bd\gamma}{2gdt}) + G + M$, welcher mit dem Reibungs-coefficienten λ multiplicirt, die daraus entſtehende Friktion giebt.

3) Da ſie am Umfange des Zapfen geſchieht, ſo iſt ihr Moment gegen die Axe, wenn man den Halbmeſſer des Zapfen e nennt, $= \lambda e [P(1 + \frac{bd\gamma}{2gdt}) + G + M)$. Dies zu den übrigen Momenten auf der rechten Seite der Gleichung (§. 242. 5.) noch hinzugefügt, giebt nunmehr:

$$Ga \operatorname{Sin} \eta = Pb + \lambda e (G + P + M) + \frac{d\gamma}{2gdt} (Pb^2 + Mh^2 + \lambda Peb)$$

woraus

$$\frac{d\gamma}{2gdt} = \frac{Ga \operatorname{Sin} \eta - Pb - \lambda e(G+P+M)}{Pb^2 + Mh^2 + \lambda Peb} \text{ wird.}$$

von ihnen angegriffenen Punkte entweder an Wirkung oder an abſoluter Größe verlieren, und ſich auf ſolche Weiſe mit der Laſt, oder dem Widerſtande, den ſie zu überwinden haben, zuletzt ins Gleichgewicht ſetzen. Bevor dies geſchieht, iſt die Geſchwindigkeit der Maſchine einem ſteten Wachsthum unterworfen, der aber in gleichem Maaße, wie die Ueberwucht der Kraft ſich vermindert, nach und nach abnimmt, und am Ende, wenn Kraft und Laſt ins Gleichgewicht treten, gänzlich verſchwindet; da dann die Geſchwindigkeit bey einer gewiſſen Grenze, die ſie erreicht hat, ſtehen bleibt, und die ganze Maſchine in dem einmal erhaltenen Gange gleichförmig beharret.

§. 252.

Zur Erläuterung dieſes, für die Ausübung ſo wichtigen Satzes, wollen wir beym Tretrade §. 248. annehmen, die Laſt P, die durch den Menſchen aufgewunden werden ſoll, ſey gegeben, ſo wird dadurch die Stelle o beſtimmt, wo er ſtehen muß, um ſelbiger das Gleichgewicht zu halten; man hat nemlich in dieſem Betracht:

$$\text{Ga Sin } \eta = \text{Pb}, \text{ mithin}$$

$$\text{Sin } \eta = \frac{\text{Pb}}{\text{Ga}}.$$

Dieſe Stelle darf er nun Anfangs nicht betreten, wofern das Rad durch ihn wirklich in Umlauf gebracht, und die Laſt gehoben werden ſoll, ſondern ſein Standpunkt muß für jetzt noch höher hinauf, etwa in m, fallen,

, ſo daß der Winkel mCB, den wir η' nennen wol-
, größer als η iſt. Alsdann wird (§. 248. 6.).

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2g\,(Ga\,Sin\,\eta' - Pb)}{Pb^2 + Mh^2}.$$

lange demnach der Winkel η' einerley bleibt, wächſt
Geſchwindigkeit des Rades gleichförmig, und kann
ſo groß werden, wie man will. Dazu gehört aber
hwendig, daß der Arbeiter ſich längs der ſchiefen
iche ſeines Standortes beſtändig mit eben der Ge-
windigkeit $a\gamma$ fortbewege, womit die Stuffen unter
nen Füßen ausweichen, oder, welches daſſelbe iſt,
ß er fortwährend mit der Geſchwindigkeit $a\gamma\,Sin\,\eta'$
tikal in die Höhe ſteige. Setzen wir nun, daß in-
halb der Stellen o und m, deren Inklination doch
ht ſehr verſchieden ſeyn kann, die vertikale Geſchwin-
kkeit, die er nach Maaßgabe ſeiner Kräfte anzuneh-
n vermag, allenthalben $= c$ ſey, ſo folgt, daß nach
iger Zeit $a\gamma\,Sin\,\eta' = c$ werden, und ſodann der
inkel η' in eben dem Verhältniſſe abnehmen müſſe,
γ fernerhin anwächſt.

Man ſubſtituire jetzt in obiger Formel für $Sin\,\eta'$
nen Werth $\frac{c}{a\gamma}$, ſo bekommt man:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2g}{Pb^2 + Mh^2} \cdot \left(\frac{Gc}{\gamma} - Pb\right).$$

dem alſo die Geſchwindigkeit des Rades größer wird,
nmt ihr Wachsthum $d\gamma$ fortdauernd ab, und ver-
windet zuletzt, nachdem $\frac{Gc}{\gamma} = Pb$ geworden iſt,

gänzlich. Hieraus ergiebt ſich für den Beharrungszuſtand: $\vartheta = \frac{Gc}{Pb}$, und $\text{Sin}\,\eta' = \frac{c}{a\vartheta} = \frac{Pb}{Ga} = \text{Sin}\,\eta$, $\eta' = \eta$, d. h. die gleichförmige Bewegung der Maſchine nimmt ihren Anfang, wenn der Menſch zu derjenigen Stelle zurückgekommen iſt, wo er der Laſt das Gleichgewicht halten würde, wenn ſich dieſelbe noch in Ruhe befände.

§. 253.

Im Beharrungszuſtande einer Maſchine hält nicht allein die Kraft, die zu ihrer Betreibung gebraucht wird, der Laſt und den Nebenhinderniſſen das Gleichgewicht, ſondern das beträchtlichſte dieſer Hinderniſſe, die Friktion, iſt auch genau von eben der Größe, als wenn die Maſchine in Ruhe wäre.

Beweis. 1) Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, es ſey nur eine feſte Axe an der Maſchine befindlich; aus der Folge unſerer Schlüſſe wird man leicht wahrnehmen, daß ſie mit eben dem Rechte gelten müſſen, es mögen der Axen ſo viele, als man will, vorhanden ſeyn. Unter dieſer Vorausſetzung ſey nun die bewegende Kraft $= V$; die Laſt, die dadurch in eine fortrückende Bewegung geſetzt wird, $= P$, ihre Geſchwindigkeit für eine gegebene Zeit $t = v$; das Moment der Trägheit aller der Theile, die ſich um die Axe drehen, in Bezug auf dieſelbe $= Mh^2$, ihre Winkelgeſchwindigkeit für eben die Zeit $= \vartheta$; die Friktion nebſt andern Hinderniſſen, auf einerley Punkt reducirt, $= R$.

2) Sollte die Bewegung ohne den Einfluß der raft und des Widerſtandes eben ſo erfolgen, wie ſie er von den einzelnen Stücken der Maſchine angegeben , ſo müßte die Laſt P nach ihrer Richtung in jedem ugenblicke durch eine Kraft $= \frac{Pdv}{2gdt}$ getrieben, und e Maſchine zu gleicher Zeit von einer andern Kraft, ie gegen ihre Axe das Moment $= \frac{Mh^2}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$ hätte, ge- rehet werden.

3) Dieſe beyden Kräfte wären alſo in Verbin- ung den gegebenen V, P und R für jeden Zeitpunkt der Bewegung äquipollent, und müßten folglich, nach ent- egengeſetzten Richtungen angebracht, ihnen das Gleich- ewicht halten.

4) Sobald aber die Bewegung in den Behar- ungszuſtand kommt, werden v und ϑ beſtändige Grö- en; folglich ihre Aenderungen dv und $d\vartheta$, und mit hnen $\frac{Pdv}{2gdt}$ und $\frac{Mh^2}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$, $= 0$; woraus erhellet, daß odann V, P und R noch unter ſich allein im Gleichge- ichte ſeyn müſſen.

5) Außer dem beſtändigen Drucke M, den die Axe durch das eigene Gewicht der Maſchine leidet, ommt während der Bewegung noch der veränderliche Druck in Betracht, der durch Kraft und Laſt auf ſie ervorgebracht wird. Was die Laſt betrifft, ſo ſpannt olche das Seil, woran ſie befeſtigt iſt, durch ihre Ge-

schwindigkeit v mit einer Gewalt $= (1 \pm \frac{dv}{2gdt}) P$, je nachdem sie sich aufwärts, oder herabwärts bewegt und übt dadurch einen Druck auf die Axe aus, der dieser Spannung gleich ist. Wird nun die Bewegung gleichförmig, also $dv = 0$, so verwandelt sich jener Druck in das bloße Gewicht P, und die Friktion, die von der Last herrührt, wird alsdann eben so groß, als für den Fall, wenn die Last ruhig hinge. Ein Gleiches gilt endlich auch vom andern Theile der Friktion, der durch die Kraft V bewirkt wird; weil dieselbe im Beharrungszustande eben die Größe hat, als im Zustande der Ruhe.

§. 254.

Die verschiedenen Hindernisse, die durch den Gang der Maschine veranlaßt werden, kann man insgesammt auf einen einzigen Punkt derselben zurückführen, und wenn man dazu eben den Punkt nimmt, worauf die Last wirkt, so lassen sie sich in Verbindung als einen Theil der Last ansehen, in welchem Betracht sie dann auch unter dem gemeinschaftlichen Namen der Nebenlast begriffen werden. Es ist daher hinreichend, bey jeder Maschine, sie mag eingerichtet seyn, wie man will, überhaupt zwey Kräfte anzunehmen: eine bewegende Kraft, die zu ihrer Betreibung angewandt wird, und einen Widerstand, der sich der erstern entgegensetzt, und die Bewegung zu verzögern strebt; es sey dieser nun eine wirkliche Last, die gehoben werden soll, oder

ein bloßes Hinderniß, als Reibung, Widerstand der Luft und dergl. oder bestehe aus beyden zugleich. Die Stelle, worauf die bewegende Kraft angebracht wird, heißt nach dem eingeführten Sprachgebrauche der **angegriffene Punkt**, und die, worauf die Last zunächst wirkt, oder eine ihr äquipollente Kraft hinverlegt ist, der **leidende Punkt** der Maschine.

§. 255.

Da im Beharrungszustande der Bewegung, Kraft und Widerstand einander das Gleichgewicht halten, so folgt nach dem Grundsatze der virtuellen Geschwindigkeiten (Statik Kap. XI.): **daß das Produkt aus der bewegenden Kraft in die Geschwindigkeit des angegriffenen Punktes dem Produkte aus dem Widerstande in die Geschwindigkeit des leidenden Punktes gleich seyn müsse.** Man nenne nemlich die erstere Kraft = P, letztere = Q; die Geschwindigkeiten der beyden Punkte, worauf sie wirken, v und u, und die augenblicklichen Wege, die diese Punkte nach ihren Richtungen durchlaufen, dp und dq; so hat man $Pdp = Qdq$, und $v = \frac{dp}{dt}$, $u = \frac{dq}{dt}$, mithin $Pv = Qu$.

§. 256.

Der **absolute Effekt**, oder der **Nutzen**, den eine Maschine leistet, richtet sich theils nach der Größe der Last, die durch sie gehoben wird, oder des Widerstandes, den sie zu überwältigen hat, theils aber

auch nach der Höhe, zu der sie die Last hinaufhebt, oder dem Raume, durch den sie den Widerstand fortschiebt, und steht mit beyden Größen im geraden Verhältnisse; oder, wenn Q den Widerstand, q seinen zurückgelegten Weg bedeutet, so ist der absolute Effekt der Maschine dem Produkte Qq proportional.

Je größer nun dieser in einer bestimmten Zeit t ist, oder umgekehrt; je weniger Zeit die Maschine braucht, um eben den Effekt hervorzubringen, desto wirksamer muß sie ohne Zweifel seyn. Man kann also sagen: der relative Effekt oder die Wirksamkeit einer Maschine stehe im geraden Verhältnisse ihres absoluten Effektes, und im verkehrten Verhältnisse der Zeit, die sie auf ihn verwendet; oder, wenn man sich der Zeichensprache bedient: sie verhalte sich wie der Quotient $\frac{Qq}{t}$.

§. 257.

Wegen der gleichförmigen Bewegung der Maschine im Beharrungszustande ist nun $\frac{q}{t} = u$, mithin $\frac{Qq}{t} = Qu$; daher wird auch eben so gut ihre Wirksamkeit durch das Produkt Qu, oder das ihm gleichgeltende Pv, dargestellt, das man gewöhnlich schlechthin ihren Effekt zu nennen pflegt. Es läßt sich aus seiner Größe, wie nun von selbst erhellet, beurtheilen, ob die Maschine mehr oder minder vortheilhaft eingerichtet sey, und was für Aenderungen mit ihr vorgenommen werden kön-

, die man als wahre Verbeſſerungen derſelben anſe-
darf.

Indeß bemerkt Herr **Langsdorf** a. m. O. ſ. Ma-
inenlehre ſehr richtig, daß in der Größe Q die eigent-
e Laſt, die er deswegen auch Nutzlaſt nennt, mit der
benlaſt, oder den Hinderniſſen der Maſchine ver-
ngt ſey, und daß daher nicht allemal bey derjenigen
nrichtung der Maſchine, wofür Qu oder Pu ein Ma-
num iſt, auch zugleich ihr **wahrer** Effekt der mög-
ſt größte ſeyn werde. Man kann ſich hier, wie mich
nkt, vor allem Irrthum ſichern, wenn man Anfangs
zu fördernde Laſt als gegeben anſieht, und daraus
s, was an der Maſchine veränderlich ſeyn darf, ſo zu
timmen ſucht, daß die Geſchwindigkeit der Laſt am
ßten wird; dann aber auch die Laſt ſelbſt als verän-
lich annimmt, und nun berechnet, wie groß ſie ſeyn
iſſe, damit das Produkt aus ihr in die Geſchwindig-
t derſelben, oder der eigentliche Effekt der Maſchine
Maximum werde. Ich will davon folgendes Bey-
el geben.

§. 258.

. 31. **Aufgabe.** An dem wagerechten Arme DF
ier ſtehenden Welle AB ſoll ein Pferd ziehen, und
durch eine Laſt aufwinden, von der ein Seil über
e Rolle K zum Umfange der Welle geht. Man
agt, für welche Laſt und Länge des Armes ſein
ug am wirkſamſten ſey,

Aufl. Es ſey die zu hebende Laſt . . . = O
die Kraft, die das Thier anwenden muß . = P
ſeine abſolute Kraft, wenn es in Ruhe iſt = K
ſeine gröſte Geſchwindigkeit . . . . = c
das Gewicht der Welle AB . . . . = G
ihre Winkelgeſchwindigkeit im Beharrungszuſtande . . . . . = ϑ
ihr Halbmeſſer . . . . . = a
der Halbmeſſer ihres Zapfens . . . . = e
die geſuchte Länge des Hebelarmes DF . = f
der Halbmeſſer der Rolle . . . . . = h
der ihrer Axe . . . . . = i
der Reibungskoefficient . . . . . = λ

1) So hat man zuvörderſt, wenn die geſammte Friktion, auf den Umfang der Welle reducirt, = F genannt wird:

$$Pf = (O + F)\,a$$

und weil die Geſchwindigkeit des Pferdes = fϑ iſt,

$$P = K\left(1 - \frac{f^2\vartheta^2}{c^2}\right)\text{ (§. 157.), mithin}$$

$$Kf\left(1 - \frac{f^2\vartheta^2}{c^2}\right) = (O + F)\,a.$$

2) Was die Friktion betrift, ſo iſt dieſe an gegenwärtiger Maſchine von dreyfacher Art. Theils entſteht ſie nemlich an dem Umfange des Zapfen durch den Seitendruck, den Kraft und Laſt auf die Welle ausüben, theils am Boden des Zapfen durch das Gewicht der Welle: endlich aber auch an der Axe der Rolle durch die Spannung des darüber gehenden Seiles.

3) Erstere kann nur allein nach dem Drucke O
:r Last geschätzt werden, da die Kraft durch ihre verän-
:rliche Richtung bald einen Druck, der mit jenem zu-
ımmenfällt, bald einen entgegengesetzten veranlaßt.
)em zufolge ist also ihr Moment = λeO, und eine
ır äquipollente Last, auf den Umfang der Welle ange-
racht, = $\frac{\lambda eO}{a}$.

4) Die Friktion am Boden des Zapfen hat das
Moment = $\frac{2}{3}$ λeG, und giebt also auf eben den Punkt
:ducirt, eine Last = $\frac{2\lambda eG}{3a}$.

5) Die Spannung des Seiles ist = O, und be-
irkt also, wenn man den Winkel, worin das Seil an
er Rolle gebogen ist, zu 90° annimmt, einen mittlern
)ruck auf ihre Axe = $\sqrt{2}O^2 = O\sqrt{2}$. Daher ist
as Moment der Friktion an diesem Theile der Ma-
hine = λiO$\sqrt{2}$, und sie selbst auf den Umfang der
Rolle, oder den leidenden Punkt reducirt, = $\frac{\lambda i}{b}$. O$\sqrt{2}$.

6) Alle drey Hindernisse addirt, geben demnach
= λO ($\frac{e}{a} + \frac{i}{b}\sqrt{2}$) + $\frac{2\lambda eG}{3a}$, worin wir der Kürze
)egen $\frac{e}{a} + \frac{i}{b}\sqrt{2}$ = n setzen wollen. Wird nun die-
r Werth für F in (1) substituirt, so erhält man

$$Kf\left(1 - \frac{f \cdot \gamma}{c^2}\right) = Oa\,(1 + n\lambda) + \frac{2}{3}\lambda eG$$

eine Gleichung, in der bloß O, f und ϑ als veränderliche Größen enthalten sind.

7) Man sehe zuerst O als gegeben an, und suche, den Werth von f, wofür ϑ ein Maximum wird. Dies geschieht, indem man die Gleichung nach f differenziirt, und dabey ϑ wie eine beständige Größe betrachtet; daher wird:

$$K\left(1-\frac{3f^2\vartheta^2}{c^2}\right)=0,$$

$$\text{mithin } \vartheta^2=\frac{c^2}{3f^2},$$

und wenn damit ϑ^2 aus der Gleichung (6) weggeschaft wird, so kommt:

$$\tfrac{2}{3}Kf=Oa(1+n\lambda)+\tfrac{2}{3}\lambda eG,$$

$$\text{woraus } f=\frac{3Oa(1+n\lambda)}{2K}+\frac{\lambda eG}{K} \text{ folgt.}$$

8) Nachdem man auf solche Art das vortheilhafteste Verhalten der Hebelslänge f zur Last O gefunden hat, nehme man nun ferner auch letztere als veränderlich an, und suche sie so zu bestimmen, daß der Effekt der Maschine, oder das Produkt Oaϑ aus der Last in ihre Geschwindigkeit aϑ ein Maximum wird. Zu dem Ende hat man:

$$\vartheta=\frac{c}{f\sqrt{3}}=\frac{2Kc\sqrt{3}}{9Oa(1+n\lambda)+6\lambda eG}$$

$$\text{also } Oa\vartheta=\frac{2KOac\sqrt{3}}{9Oa(1+n\lambda)+6\lambda eG},$$

wovon nun das Differenzial, nach O genommen, $=0$ gesetzt werden müßte. Allein man sieht schon vorläufig,

daß diese Größe, wenn man darin O wachsen läßt, ebenfalls beständig zunimmt, und also keines Maximums fähig ist. Sie nähert sich aber mit wachsendem O unendlich einer Grenze $= \frac{2Kc\sqrt{3}}{9(1+n\lambda)}$.

9) Hieraus folgt demnach: daß der Effekt dieser Maschine bey jeder Einrichtung, die man ihr geben kann, stets kleiner sey, als $\frac{2Kc\sqrt{3}}{9(1+n\lambda)}$, aber dieser Grenze desto näher komme, je größer man die Last, und folglich auch die Länge des Hebelarmes annimmt.

Es sey z. B. der Halbmesser der Welle mit Inbegriff der halben Dicke des Seiles, oder $a = 9$ Zoll, $b = 7$ Zoll, e und $i = \frac{1}{2}$ Zoll, $K = 400$ ℔, $c = 12$ Fuß, $\lambda = \frac{1}{6}$; so erhält man $1 + n\lambda = 1{,}0261$, und für den größten Effekt $0{,}3849 \cdot \frac{Kc}{1+n\lambda} = 1804{,}7$ ℔. Ferner sey nun die gegebene Last $O = 3000$ ℔, das Gewicht der Welle $G = 600$ ℔, so wird die vortheilhafteste Länge des Hebelarmes $f = 8{,}661 + 0{,}01 = 8{,}67$ Fuß, oder beynahe $8\frac{2}{3}$ Fuß; $\vartheta = 0{,}8$; also die Geschwindigkeit der Last $a\vartheta = 0{,}6$ Fuß, und der Effekt $Oa\vartheta = 1800$ ℔.

Berechnung einer Roßmühle.

§. 259.

Die Figur 31. zeigt den einfachen Bau dieser Maschine, von deren Einrichtung ich nur das Wesentlichste,

was nemlich zur richtigen Beurtheilung derſelben allein hinreicht, hier anzuführen für nöthig achte. Durch die ſtehende Welle AB, die man den **Mühlbaum** nennt, gehen horizontale Arme DF, die, wie beym Göpel, durch vorgeſpannte Pferde im Kreiſe fortgezogen werden, und ſolchergeſtalt die Welle umdrehen. Ihre Umdrehung ſetzt ein daran befindliches horizontales Sternrad ECG in Bewegung, das in ein nebenſtehendes Getriebe eingreift, und mit dieſem zugleich den obern beweglichen Mühlſtein oder **Läufer** mn, der mit dem Getriebe an einerley Axe ab, dem **Mühleiſen**, befeſtigt iſt, in Umlauf bringt.

§. 260.

Der hauptſächlichſte Widerſtand, den hier die Kraft zu überwinden hat, und den man mit Herrn **Langsdorf** die Nutzlaſt nennen könnte, entſteht durch das Zerreiben des Kornes zwiſchen dem Läufer, und dem untern unbeweglichen Steine pq. Er iſt nach den vielfältigen Erfahrungen **Belidor's** *) und anderer ſachkundigen Männer von der Geſchwindigkeit unabhängig, und läßt ſich als eine gewöhnliche Reibung anſehen, die durch den Druck des Läufers hervorgebracht wird, und wofür die Verhältnißzahl $\lambda = \frac{1}{3\frac{1}{5}}$ ausmacht. Dieſem zufolge iſt ſein Moment, wenn man das Gewicht des Läufers $= G$, und ſeinen Halbmeſſer $= h$ ſetzt, $= \frac{2}{3}\lambda Gh = \frac{2}{10\frac{1}{5}} Gh$.

Nennt man nun außerdem den Halbmeſſer des

*) Architecture hydraulique, §. 654.

riebes = b, ſo iſt eine ihm äquipollente Kraft, auf Umfang deſſelben, oder des damit zuſammenſtoßen- Rades angebracht, $= \frac{2Gh}{105b}$.

§. 261.

Die übrigen Hinderniſſe, die nebenbey durch die ſchine ſelbſt veranlaßt werden, ſind: das Reiben ſtehenden Zapfen von Welle und Mühleiſen in ihren nnen, und der zuſammenſtoßenden Zähne von Rad Getriebe. Um ſie zu beſtimmen, ſetze man das

dicht der Welle und des Rades	= M
des Mühleiſens	= N
halbe Dicke ihrer Zapfen	= e und i,
Halbmeſſer des Rades	= a

ebt die Reibung erſterer Art, auf den Umfang des es reducirt, daſelbſt eine Kraft $= \frac{2}{3}\lambda\left(\frac{Me}{a} + \frac{Ni}{b}\right)$.

letztere hingegen hängt von dem in vorigen §. be- mten Widerſtande ab, und iſt, wenn man denſel- = R, und die Winkeldiſtanz zweyer Triebſtöcke ſetzt, von o bis zu $\lambda R \tang \frac{1}{2}\eta$ veränderlich; alſo Mittel $= \frac{1}{2}\lambda R \tang \frac{1}{2}\eta$. Außerdem entſteht zwar durch die Kraft $R \tang \frac{1}{2}\eta$, womit das Rad vom iebe gegen die Axe der Welle gedrückt wird, eine Rei- an den Seiten der Zapfen, die aber, auf den Um- des Rades gebracht, zu der vorhergehenden ſich lt, wie e : a, und folglich dagegen in gar keinen acht kommt.

Demnach ist der gesammte Widerstand, auf den Umfang des Rades reducirt, $= \frac{2Gn}{105b}(1 + \frac{1}{2}\lambda \text{ tang. } \frac{1}{2}\eta) + \frac{2}{3}\lambda(\frac{Me}{a} + \frac{Ni}{b})$, den wir einstweilen durch F bezeichnen wollen.

§. 262.

Nach dieser vorläufigen Betrachtung sey nun ferner:

die absolute Kraft von allen den Pferden, die zur Betreibung der Mühle gebraucht werden, zusammengenommen . . . . . $= K$,
ihre größte Schnelligkeit . . . . . $= c$,
die Länge des Hebelarmes DF . . . . . $= f$,
die Winkelgeschwindigkeit des Läufers im Beharrungszustande . . . . . $= \omega$,

so ist die Geschwindigkeit eines Punktes am Umfange des Getriebes oder des Rades $= \omega b$; also die Winkelgeschwindigkeit der Welle $= \frac{\omega b}{a}$, und die Geschwindigkeit der Pferde $= \frac{\omega bf}{a}$, folglich die Kraft, die sie dabey auf den Zug verwenden können, $= K(1 - \frac{\omega^2 b^2 f^2}{a^2 c^2}$; mithin

$$Kf\left(1 - \frac{\omega^2 b^2 f^2}{a^2 c^2}\right) = Fa;$$

woraus die vortheilhafteste Hebellänge f in doppelter

insicht gefunden werden kann. Einmal nemlich, in- m man sucht, für welchen Werth von f die Geschwin- gkeit ω des Läufers bey gegebener Kraft K ihr Maxi- um erreicht: dann aber auch, indem man ω als gege- n annimmt, und unter dieser Bedingung f so be- mmt, daß die verlangte Geschwindigkeit ω durch die öglichst kleine Kraft K hervorgebracht wird.

Letztere Voraussetzung ist ohne Zweifel dem Zwecke : Maschine am angemessensten, der bekanntlich, in nsicht auf Geschwindigkeit, eine zu schnelle Umdre- ng des Läufers durchaus nicht gestattet; dagen aber t der möglichsten Ersparung der Kraft recht gut sich einigen läßt.

§. 263.

Wir wollen demnach ω als gegeben ansehen, und n f so zu bestimmen suchen, daß dadurch K ein Mi- mum wird. Zu dem Ende differenzire man die vor- rgehende Gleichung nach f, und nehme dabey, weil $\zeta = o$ seyn soll, sowohl ω wie auch K als unverän- rlich an. Dies giebt sodann, da f in der Größe F cht vorkommt:

$$1 - \frac{3\omega^2 b^2 f^2}{a^2 c^2} = o, \text{ also}$$

$$f = \frac{ac}{\omega b\sqrt{3}},$$

raus nach geschehener Substitution

$$\tfrac{3}{2}Kf = Fa, \text{ oder } K = \frac{3F\omega b\sqrt{3}}{2c} \text{ folgt.}$$

Man ſubſtituire noch für F ſeinen Werth, und ſetze die Verhältnißzahl $\frac{a}{b} = n$, ſo erhält man endlich

$$cK = \frac{\sqrt{3}}{35} \cdot G\omega h \left(1 + \tfrac{1}{2}\lambda \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\eta\right) + (neM + iN) \cdot \lambda\omega\sqrt{3},$$

$$\text{und } f = \frac{nc}{\omega\sqrt{3}}.$$

§. 264.

Um zu ſehen, ob zur Verminderung der Kraft auch ein vortheilhafteres Verhältniß zwiſchen den Halbmeſſern a und b ſtatt finde, nehme man wieder die anfängliche Gleichung (§. 262.) zu Hülfe, und ſetze darin ſtatt F ſeinen Werth (§. 261.), und außerdem $\frac{a}{b} = n$, ſo wird:

$$Kf\left(1 - \frac{\omega^2 f^2}{n^2 c^2}\right) = \tfrac{2}{105} nGh \left(1 + \tfrac{1}{2}\lambda \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\eta\right) + \tfrac{2}{3}\lambda (eM + niN).$$

Damit nun K ein Minimum werde, differenziire man dieſe Gleichung nach n, und betrachte dabey die Größen ω, f, wie auch K als beſtändig, ſo erhält man ferner:

$$\frac{2K\omega^2 f^3}{n^3 c^2} = \tfrac{2}{105} Gh \left(1 + \tfrac{1}{2}\lambda \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\eta\right) + \tfrac{2}{3}\lambda iN,$$

und, wenn man das nfache letzterer Gleichung von der erſtern ſubtrahirt:

$$Kf\left(1 - \frac{3\omega^2 f^2}{n^2 c^2}\right) = \tfrac{2}{3}\lambda eM.$$

Hierin

rin noch für f seinen vorhin gefundenen Werth $\frac{nc}{\omega\sqrt{3}}$
ßt, giebt endlich:

$$o = \tfrac{2}{5}\lambda eM.$$

Da nun solchergestalt die Zahl n unbestimmt
bt, und es an sich klar ist, daß die Kraft K unter
n den Umständen am kleinsten seyn müßte, wenn die
ktion der Welle sich gänzlich aufheben ließe; so ist es
führlich, in welchem Verhältnisse man die Halb-
ser a und b annimmt, und die vortheilhafteste Ein-
tung der Mühle beruhet also bloß auf folgender Pro-
tion:

$$c : f = \omega\sqrt{3} : n$$

nach gegenseitig f aus n, und n aus f gefunden wer-
kann.

§. 265.

Die angemessenste Geschwindigkeit des Läufers
rd bey unsern deutschen, flach gehauenen, Mühlstei-
n der Erfahrung gemäß zu 24 Rheinl. Fuß am Um-
ge angenommen. Hiernach würde also $h\omega = 24$,
d wenn wir $c = 12$ Fuß setzen:

$$f = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot nh = 0{,}288675 \cdot nh,$$

$$\zeta = 2\sqrt{3}\left[\tfrac{2}{3}G(1+\tfrac{1}{2}\lambda \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\eta)+\frac{\lambda}{h}(neM+iN)\right].$$

Exempel. Es sey $a = 8$ Fuß, $b = 6$ Zoll,
er $n = 16$; $h = 3$ Fuß, $e = 9$ Lin., $i = 3$ Lin.;
$= 2400$ ℔, $M = 400$ ℔, $N = 200$ ℔; die Anzahl

der Triebſtöcke = 12, alſo $\eta = 30°$, und endlich $\lambda = \frac{1}{y}$ ſo erhält man zuvörderſt $f = 8\sqrt{3} = 13{,}8564$ Fuß, ferner

$\frac{1}{2}\lambda \tang \frac{1}{2}\eta = 0{,}04466$, $neM + iN = 404\frac{1}{6}$, mithin

$K = 2\sqrt{3} \cdot 71{,}634 + 44{,}907) = 403{,}71$ ℔,

ſo daß alſo ein einzelnes Pferd zur Betreibung der Mühle hinreichend ſeyn würde.

Vom Widerſtande der Luft bey drehender Bewegung.

§. 266.

Fig. 32. **Aufgabe.** Ein Körper dreht ſich mit der Winkelgeſchwindigkeit ω um die feſte Axe AB; man ſucht das Moment des Widerſtandes, den die Luft auf ein Element mnpq = dS ſeiner Vorderfläche ausübt.

Aufl. 1) Um die Lage deſſelben zu beſtimmen, fälle man aus einem ſeiner Punkte m auf die Axe das Perpendikel mO = w, und lege durch beyde Linien AB und Om eine Ebene AOm, die die Fläche mnpq in mn ſchneiden mag. Dieſe Ebene ſoll in Zukunft die **Axenfläche** des Elementes heißen.

2) Man errichte ferner auf mn in der Ebene des Elementes das Perpendikel mp, und fälle aus p auf die Axenfläche noch ein zweytes po, ſo iſt pmo der Neigungswinkel beyder Ebenen, den wir = I ſetzen wollen, und op die Richtung, nach der ſich das Element mit der Geſchwindigkeit ωw in gegenwärtigem Augenblicke bewegt.

3) Indem daſſelbe nach dieſer ſchrägen Richtung ...zieht, liegt offenbar nicht mehr Luftmaſſe vor ihm, ...e es aus der Stelle zu treiben hat, als gegen ſeine ...rojektion in der Axenfläche mnov = dS . Cos I ſenk...cht aufſtoßen würde; daher leidet es von der Luft den ...tiefen Druck p = λϑ²w² Cos IdS.

4) Man zerlege ſelbigen in zwey Kräfte nach den ...yden Richtungen pr und pm, wovon erſtere auf die ...läche des Elementes ſenkrecht, letztere damit parallel ...t; ſo erhält man nach pr den normalen Druck p Cos ...pr = p Cos I, der nur allein die Bewegung verzö...rn kann, da der andere Druck nach pm der Luft einen ...eyen Abfluß geſtattet, und folglich ſeine Wirkung ...nzlich verliert.

5) Aus dem normalen Widerſtande p Cos I ent...ringt ferner noch eine Kraft nach po = p Cos I . Cos ...or = p Cos I², und eine nach or = p Cos I Sin I. ...ztere von dieſen Kräften drückt nach der ſchrägen Rich...ng um gegen die Axe AB, und wird deshalb aufge...ben; erſtere hingegen ſtrebt den Körper nach der Rich...ng po, die der ſeinigen entgegengeſetzt iſt, um die ...xe zu drehen, und hat gegen ſie das Moment pw Cos ... = λϑ²w³ Cos I³dS.

§. 267.

1) Wenn man ſolchergeſtalt die Momente für alle ...lemente der Vorderfläche des Körpers berechnet, und ...e in eine Summe zuſammenfaßt, ſo bekommt man ...as Moment des geſammten Widerſtandes, den die

Luft ſeiner Umdrehung entgegenſetzt. Man kann es vorläufig durch das Integral $\lambda\gamma^2\int w^2 \cos I^2 dS$ ausdrücken.

2) Da die Summe $\int w^2 \cos I^2 dS$ für jeden beſtimmten Körper, der ſich um eine gegebene Axe dreht, von beſtändiger Größe iſt, ſo folgt: **daß das Moment des Widerſtandes der Luft dem Quadrate der Winkelgeſchwindigkeit des Körpers proportional ſey.**

3) Wofern die einzelnen Elemente der Oberfläche des Körpers gegen ihre Axenflächen eine ſenkrechte Lage haben, ſo iſt allenthalben $\cos I = 0$, mithin auch $\int w^2 \cos I^2 dS = 0$; woraus der ſchon an ſich natürliche Satz fließt: daß ein von außen rund geformter Körper, der ſich um ſeine centrale Axe dreht, von dem Widerſtande der Luft gänzlich frey ſey. Dergleichen Körper ſind beym Maſchinenweſen z. B. die cylindriſchen Wellen, die Kränze der Räder, die Rollen u. a. m.

4) Fallen dagegen die Elemente der Vorderfläche des Körpers insgeſammt in eine gemeinſchaftliche Axenfläche AOG, ſo iſt durchgängig $\cos I = 1$, alſo das Moment des Widerſtandes $= \lambda\gamma^2\int w^2 dS$.

5) Von einem Rechtecke, das in dieſe Axenfläche fällt, und deſſen Grundlinie mit der Axe parallel läuft, ſey die Breite $= b$, die Höhe $FG = h$, und der Abſtand CO ſeiner Mitte C von der Axe $= f$. Man denke ſich die ganze Fläche dieſes Rechtecks in lauter unendlich ſchmale, mit der Axe parallele, Streifen $dS = bdx$ getheilt, und ſetze für zwey derſelben, die bey m und n

gleich weit von C abliegen, $Cm = Cn = x$; so sind ihre Entfernungen Om und On von der Axe $= f + x$ und $f - x$, also die Momente des Widerstandes auf beyde zusammengenommen $= \lambda \gamma^2 b\,(f^3 + 3fx^2)\,dx$, wovon das Integral $= \lambda \gamma^2 bfx\,(f^2 + x^2)$ ist. Hierin $x = \frac{1}{2}h$ gesetzt, giebt das Moment des gesammten Widerstandes auf das Rechteck $= \frac{1}{2}\lambda \gamma^2 fbh\,(f^2 + \frac{1}{4}h^2)$.

b) Erstreckt sich dasselbe bis zur Axe hin, so ist $f = \frac{1}{2}h$, folglich wird alsdann das Moment $= \frac{5}{8}\lambda \gamma^2 bh^3$.

§. 268.

Ist die Oberfläche des Körpers von der Beschaffenheit, daß man sie durch eine Gleichung zwischen dreyen Koordinaten darstellen kann, so läßt sich das Integral $\int vv^3 \operatorname{Cos} I^3 dS$ auf folgende Art sehr leicht entwickeln:

Fig. 33. 1) Man ziehe in einer der Axenflächen BAD eine Linie AD nach Gefallen auf die Axe AB senkrecht; fälle aus einem Punkte Z der Oberfläche auf die Ebene BAD das Perpendikel ZY, und aus Y auf AD noch ein zweytes AX; so daß die Lage des Punktes Z auf die drey rechtwinklichten Koordinaten $AX = x$, $XY = y$, und $YZ = z$ zurückgeführt wird.

2) Die Differenziale dx und dy der erstern beyden schließen bey Y ein Rechteck ein, dessen Inhalt $= dxdy$ ist, und wenn man durch dessen Seiten vier Ebenen senkrecht auf die Axenfläche BAD errichtet, so wird dadurch an der Oberfläche des Körpers ein vierseitiges

Element $= dS$ abgeſchnitten, wovon das untere Rechteck die gerade Projektion iſt.

3) Dies vorausgeſetzt, ſey Zq die Normale am Punkte Z der Oberfläche, ihre Länge $= r$, ſo hat man bekanntlich für deren Koordinaten $Ap = x + z\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $pq = y + z\left(\frac{dz}{dy}\right)$; ferner $r = \sqrt{(ZY^2 + Yr^2 + rq^2)} = z\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}$, und außerdem $dS = \frac{r}{z} \cdot dxdy$.

4) Man fälle noch aus Z auf die Axe das Perpendikel $ZO = w = \sqrt{(x^2 + z^2)}$, und errichte aus eben dem Punkte auf ZO in der Ebene OYZ, ein anderes Zn, ſo iſt dies auch auf der Axenfläche AOZ des Elementes dS ſenkrecht, und macht folglich mit der Normale Zq des letztern eben den Winkel $qZn = I$, unter dem die beyden Flächen ſelbſt gegeneinander geneigt ſind.

5) Wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke OZY und YZn iſt nun:

$$OY : YZ = YZ : Yn,$$

alſo $Yn = \frac{z^2}{x}$, $nr = z\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{z^2}{x} = z\left[\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{z}{x}\right]$, und da $qr = z\left(\frac{dz}{dy}\right)$, ſo wird

$$nq = z\sqrt{\left[\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 - \frac{2zdz}{xdx} + \frac{z^2}{x^2}\right]}.$$

6) Ferner iſt OY : OZ = ZY : Zn,

alſo $Zn = \frac{wz}{x} = z\sqrt{(1+\frac{z^2}{x^2})}$, mithin

$$\text{Cos } qZn = \text{Cos } I = \frac{Zq^2 + Zn^2 - nq^2}{2Zq \cdot Zn} = \frac{z}{w}.$$

$$[x + z(\frac{dz}{dx})].$$

7) Demnach wird

$$w^3 \text{ Cos } I\,dS = (\frac{z}{r})^3 [x + z(\frac{dz}{dx})]^3 . (\frac{r}{z})\,dxdy$$

$$= (\frac{z}{r})^2 [x + z(\frac{dz}{dx})]^3\,dxdy,$$

und folglich das Moment des geſammten Widerſtandes auf die Fläche des Körpers $= \lambda\omega^2 \iint (\frac{z}{r})^2 [x + z(\frac{dz}{dx})]^3\,dxdy$, das nach den veränderlichen Größen x und y ſo weit genommen werden muß, als ſich der Theil der Oberfläche erſtreckt, der nach der Seite, wohin die Umdrehung geſchieht, der Luft zugekehrt iſt.

§. 269.

1. Zu eben dem Reſultate wird man auf einem noch weit kürzeren Wege durch folgende Betrachtung geleitet:

Da der Druck der Luft auf das Element dS nach deſſen Normale Zq geſchieht, und eine Kraft ſtets einerley Wirkung ausübt, ſie mag auf einen Punkt ihrer Richtung hinverlegt werden, wohin man will (Statik Kap. II.); ſo iſt es gleichgültig, ob das gedachte Element in Z, oder in jedem andern Punkte der Normale

Zq ſich befindet, wofern nur ſeine Lage immer ſenkrecht darauf bleibt. Wir wollen demnach ſetzen, es läge in q; ſo wäre nunmehr die Ebene BAD ſeine Axenfläche, und ſein Neigungswinkel I gegen dieſelbe = dem Winkel YZq, den die Normalen beyder Flächen mit einander machen; alſo $\text{Cos } I = \frac{ZY}{Zq} = \frac{z}{r}$. Ferner ſeine Entfernung von der Axe = $Ap = x + z\left(\frac{dz}{dx}\right)$, und endlich ſeine Projektion auf die Ebene BAD = $dS \text{ Cos } I = dxdy$, mithin $w^3 \text{ Cos } I^3 ds = w^3 \text{ Cos } I^3 dxdy = \left(\frac{r}{z}\right)^3 [x + z\left(\frac{dz}{dx}\right)]^3 dxdy$, wie vorhin.

2. Um die Normale r aus der Formel wegzuſchaffen, ſetze man $\left(\frac{dz}{dx}\right) = p$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = q$, ſo wird $r = z\sqrt{1 + p^2 + q^2}$. Dieſen Werth für r ſubſtituirt, giebt das Moment des Widerſtandes: $= \lambda\omega^2 \int \frac{(x+pz)^3 dxdy}{1 + p^2 + q^2}$.

§. 270.

Exempel I. Eine Kugel vom Halbmeſſer = a dreht ſich mit der Winkelgeſchwindigkeit ω um eine Axe, die von ihrem Mittelpunkte um die Weite = f entfernt liegt; man ſucht das Moment des Widerſtandes, den die Luft ihr entgegenſetzt.

1) Man laſſe die Abſciſſenlinie AD durch ihren Mittelpunkt gehen, und nehme in dieſem zugleich den

nfangspunkt der Abſciſſen x an, ſo hat man für die berfläche der Kugel die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

elche nach x differenziirt, $x + z\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$, oder $\frac{dz}{dx}) = -\frac{x}{z}$ giebt.

2) Für dieſe Annahme iſt aber die in der Formel it x bezeichnete Abſciſſe $Ap = f + x$, folglich das ›rtige Integral $= \iint\left(\frac{z}{r}\right)^s [f + x + z\left(\frac{dz}{dx}\right)]^s dxdy$, ıs ſich nach verrichteter Subſtitution, da außerdem r $= a$ iſt, in $\frac{f^3}{a^2}\iint(a^2 - x^2 - y^2)\,dxdy$ verwandelt.

3) Man integrire nun zuerſt nach y, ſo erhält man $(a^2 - x^2)\,y - \frac{1}{3}y^3]\,dx$, und darin $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ ſetzt, giebt $\frac{2}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}dx$, oder, wenn man y in eſer Bedeutung beybehält: $\frac{2}{3}y^3dx$.

4) Ferner iſt $\int y^3dx = \frac{1}{4}y^3x + \frac{3}{4}a^2\int ydx$ (§. 206. .), nnd ſowohl für $x = a$, als $x = -a$, $y = 0$, $dx = \frac{1}{4}\pi a^2$; alſo das Moment des Widerſtandes uf das Viertel der vordern Halbkugel $= \lambda\gamma^2 . \frac{2f^3}{3a^2}$. $\frac{1}{8}\pi a^4 = \frac{1}{16}\lambda\gamma^2\pi a^2f^3$, und folglich auf die ganze ordere Halbkugelfläche $= \frac{1}{2}\lambda\gamma^2\pi a^2f^3$.

5) Nennt man die Geſchwindigkeit ihres Mittelunktes $= u$, ſo wird $u = \gamma f$; alſo das gefundene Moment auch $= \frac{1}{2}\lambda\pi a^2u^2f$. Hieraus erhellet: daß ne Kugel, die ſich um irgend eine feſte Axe dreht,

von der Luft eben den Widerſtand leide, als wenn ſie mit der Geſchwindigkeit, die ihr Mittelpunkt dabey hat, in gerader Linie fortrückte.

§. 271.

II. Es ſey die centrale Axe eines Cylinders mit ſeiner Umdrehungsaxe parallel; ihr Abſtand davon $= f$, der Halbmeſſer des Cylinders $= a$, ſeine Länge $= b$, und die Winkelgeſchwindigkeit deſſelben $= \gamma$; man ſucht das Moment des Widerſtandes, den die Luft auf ſeine Vorderfläche ausübt.

1) Man laſſe die Abſciſſenlinie AD durch den Mittelpunkt ſeiner Grundfläche gehen, und ſetze in ihn zugleich den Anfangspunkt der Abſciſſen x; ſo hat man, weil x und z die Koordinaten ſeiner Querſchnitte ſind:

$$x^2 + z^2 = a^2, \text{ folglich } x + z\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

2) Wegen dieſer Vorausſetzung iſt aber wiederum das, was in der Formel x genannt iſt, hier $= f + x$; alſo das Integral $= \iint \left(\frac{z}{r}\right)^2 \cdot \left[f + x + z\left(\frac{dz}{dx}\right)\right]^2 dxdy = \frac{f^2}{a^2} \iint z^2 dxdy.$

3) Da z nicht von y abhängt, ſo giebt die erſte Integration, wobey bloß y als veränderlich betrachtet wird: $\frac{f^2}{a^2} \cdot y \int z^2 dx$, und darin $y = b$ geſetzt, erhält man $\frac{f^2 b}{a^2} \int z^2 dx$.

4) Ferner wird $\int z^2 dx = \int (a^2 - x^2)\, dx = C + ax - \frac{1}{3}x^3$, und da dies für $x = -a$ verschwinden muß, $C = \frac{2}{3}a^3$; also der vollständige Werth von $\int z^2 dx$ für $x = a$, $= \frac{2}{3}a^3 + \frac{2}{3}a^3 = \frac{4}{3}a^3$, und folglich das verlangte Moment des Widerstandes $= \frac{4}{3}\lambda\omega^2 abf^2$.

§. 272.

III. Der Cylinder stehe auf seiner Umdrehungsaxe senkrecht; seine Höhe sey $= f$, der Halbmesser seiner Grundfläche $= a$, und die Winkelgeschwindigkeit $= \omega$. Man fragt nach dem Momente des Widerstandes.

1) Man nehme die Abscissenlinie in seiner centralen Axe, und den Anfangspunkt der Abscissen im Mittelpunkte einer Grundfläche an, so sind jetzt y und z die Koordinaten der Querschnitte, folglich ist $y^2 + z^2 = a^2$, und $\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$.

2) Daher wird das Integral $\iint \left(\frac{z}{r}\right)^2 [x + z\left(\frac{dz}{dx}\right)]^3 dxdy = \frac{1}{a^2}\iint x^3 z^3 dxdy$.

3) Nun hat man zuvörderst, wie im vorhergehenden Falle, $\int z^3 dy = \frac{4}{3}a^3$; mithin $\frac{1}{a^2}\iint x^3 z^3 dxdy = a\int x^3 dx = \frac{1}{3}ax^4$. Hierin $x = f$ gesetzt, giebt das Moment des gesammten Widerstandes $= \frac{1}{3}\lambda\omega^2 af^4$.

§. 273.

Da die Umdrehungen um feste Axen stets einerley, und zwar sehr beschränkten, Raum erfordern, sie mögen

ſchnell oder langſam geſchehen, ſo gewähren ſie ein weit bequemeres und ſicheres Mittel, Beobachtungen über den Widerſtand der Luft anzuſtellen, als das Fallen der Körper, oder andere fortrückende Bewegungen. Dergleichen Verſuche beſchreibt **Charles Hutton** in den Transact. of the Roy. Soc. of Edinburgh Vol. II. pag. 29., wobey er folgende Einrichtung getroffen hat: Fig. 31. An der ſtehenden Welle AB iſt ein langer horizontaler Hebelarm DF befeſtigt, und auf deſſen äuſerſtes Ende D der Körper angebracht, womit der Verſuch gemacht werden ſoll. Vom Umfange der Welle geht eine Schnur über die Rolle K zu einem Gewichte, das beym Herabſinken die Schnur abwickelt, und ſo die Welle umdreht. Anfangs wird nun zwar die Bewegung von dem Gewichte beſchleunigt: aber eben dadurch auch der Widerſtand der Luft auf die Fläche des Körpers vermehrt, ſo daß derſelbe binnen kurzer Zeit mit dem Gewichte ins Gleichgewicht tritt, und alsdann die fernere Beſchleunigung verhindert. Sobald man wahrnimmt, daß dies bereits geſchehen ſey, wird die Zeit von mehreren Umläufen der Welle mit einer Sekundenuhr beobachtet, und daraus ein Mittel für die Winkelgeſchwindigkeit derſelben hergenommen. Wir wollen ſetzen, ſie ſey in einer Zeit von t Sek. nmal herumgekommen, und ihre Winkelgeſchwindigkeit dabey $= \omega$, ſo hat man:

$$\omega : 2n\pi = 1 : t,$$

woraus ω deſto richtiger gefunden wird, je mehr Umläufe man zu Hülfe nimmt.

Um die Friktion an der Welle, und den Widerand der Luft auf den Hebelarm DF in Rechnung zu ingen, wird sowohl der Körper als das Gewicht von r Maschine abgenommen, und nun so viel kleineres ewicht an die Schnur gehängt, daß dadurch der ledige rm zuletzt die vorige Geschwindigkeit bekommt. Dies t nun freylich bey einem einzelnen Versuche schwer zu effen: aber wenn man deren mehrere nach einander it verschiedenen Gewichten angestellt hat, so kann man ch für jede verlangte Geschwindigkeit das erforderliche ewicht durch Interpolation mit ziemlicher Genauigit bestimmen.

§. 274.

Es sey nun im Beharrungszustande der Bewegung die Winkelgeschwindigkeit der Welle $= \omega$, ihr albmesser $= b$, das Moment des Widerstandes der ft auf die vordere Seite des Körpers $= \lambda\omega^2 M$, auf n Hebelarm $= \lambda\omega^2 m$, das angehängte Gewicht $= P$, s Moment der dadurch bewirkten Friktion an der eite des Zapfen $= Pe$, und das Moment der Friktion, die vom Gewichte der Welle herrührt $= Ge$, so hält man:

$$Pb = \lambda\omega^2 (M + m) + e (G + P),$$

ıd wenn p das Gewicht heißt, wodurch der bloße Hearm dieselbe Geschwindigkeit ω bekommt, nachdem e Umdrehung gleichförmig geworden ist, so wird rner:

$$pb = \lambda\omega^2 m + e (G + p).$$

Dies vom erſtern abgezogen, bleibt

$$(P-p)\,b = i\,\upsilon^2 M + e\,(P-p)$$

woraus $\lambda = \dfrac{(P-p)\,(b-e)}{M\upsilon^2}$ folgt.

Herr Hutton nahm zu ſeinen Verſuchen eine Halbkugel von Pappe, wovon er bald die Grundfläche, bald die konvexe Seite vorangehen ließ, und ſo den Widerſtand der Luft auf zweyerley Flächen zugleich, die ebene und die ſphäriſche, erhielt. Wir wollen hier nur den letztern Fall betrachten, wofür $M = \frac{1}{2}\pi a^2 f^3$ iſt (§. 270.); dies in die vorhergehende Formel ſubſtituirt, und auſſerdem die Geſchwindigkeit des Mittelpunkts der Halbkugel $\upsilon f = v$ geſetzt, giebt:

$$\lambda = \frac{2\,(P-p)\,(b-e)}{\pi a^2 v^2 f}.$$

Ferner war bey ihm die Länge des Arms $f = 53{,}34$ engl. Zoll, der Halbmeſſer der Halbkugel $a = 3\frac{1}{16}''$, und der Halbmeſſer der Welle, mit Inbegriff der halben Dicke des Fadens, $b = 1{,}043''$. Die Dicke des Zapfens iſt nicht angegeben, ſondern nur die Bemerkung gemacht, daß er ſich an Friktionsrädern drehte, wodurch alſo die Seitenfriktion ſehr vermindert, und folglich e höchſt unbedeutend werden mußte; ſo daß man es aus der Rechnung ſicher weglaſſen kann. Dies vorausgeſetzt, erhält man nun, wenn man a in Rheinl. Fußen ausdrückt, $\log \dfrac{2b}{\pi a^2 f} = 0{,}2717188 - 1$, und dazu $\log\left(\dfrac{P-p}{v^2}\right)$ addirt, giebt alsdann $\log \lambda$. Auf

che Art ſind für nachſtehende Gewichte, und die dar- s erfolgten Geſchwindigkeiten der Halbkugel die da- en befindlichen Werthe von λ berechnet, die ich aber, e im Kap. IV. auf rheinl. Fußmaaß und die Ge- chtseinheit ℔ bezogen habe:

v rhl. Fuß.	P Unzen.	p Unzen.	P−p Unzen.	λ
10	16,2	3,8	12,4	0,0015352
12	22,6	5,1	17,5	0,0015048
14	30,6	6,5	24,1	0,0015524
16	40,0	7,9	32,1	0,0015223
18	51,0	9,5	41,5	0,0015858
20	64,0	11,0	53,0	0,0016410

Dieſe Koefficienten ſtimmen unter ſich, wie man t, ziemlich genau überein, wiewohl ſie von denen, wir (§. 94.) aus den Hawksbeeſchen Verſuchen her- itet haben, beynahe um ein Fünftel ihres Werthes eichen: wovon aber die Schuld in Verſchiedenheit Barometerhöhen, ungleicher Temperatur, und an- n Nebenumſtänden ſehr wohl liegen kann.

Neuntes Kapitel.

Von den freyen Axen feſter Körper.

§. 275.

Fig. 23. Es ſey AB eine unbewegliche Axe, um die ſich ein feſter Körper mit der Winkelgeſchwindigkeit γ gleichförmig dreht; Z der Ort eines ſeiner Elemente, deſſen Maſſe wir $= dM$ ſetzen wollen, und ſeine ſenkrechte Entfernung ZO von der Axe $= r$; ſo iſt die Geſchwindigkeit, womit es ſich im Kreiſe um den Punkt O herum bewegt, $= \gamma r$ (§. 197.), und folglich die Schwungkraft, die es dadurch bekommt, $= \frac{\gamma^2 r^2 dM}{2gr}$ (§. 61.) $= \frac{\gamma^2}{2g} . rdM$. Mit dieſer Kraft ſtrebt alſo das Element ſich von O zu entfernen, und da dies wegen der Feſtigkeit des Körpers nicht möglich iſt, den Punkt O nach der Richtung OZ mit ſich fortzureißen.

Eine ähnliche Kraft wird auf den Punkt O durch jedes andere Element verübt, das ſich in der Umdrehungsebene ZOz befindet, und was von dieſem einzelnen Punkte der Axe gilt, erſtreckt ſich auch auf alle übrigen Punkte derſelben, ſo daß die ganze Axe, während der Körper ſich um ſie dreht, einer beſtändigen Gewalt ausgeſetzt iſt, die allein durch die Umdrehung des Körpers und den damit verbundenen Kreislauf ſeiner einzelnen Elemente bewirkt wird.

§. 276.

§. 276.

Aufgabe. Ein feſter Körper von gegebener Geſtalt und Größe dreht ſich mit der Winkelgeſchwindigkeit γ gleichförmig um die Axe IA; man ſucht die Kräfte, womit die Axe gehalten werden muß, damit ſie nicht aus ihrer Lage rücke.

Fig. 34. **Aufl.** 1) Man errichte aus einem beliebigen Punkte I derſelben zwey Linien IB und IC, ſowohl unter ſich als auf die Axe, ſenkrecht, und ziehe dieſen für ein Element des Körpers bey Z, deſſen Maſſe dM heißen mag, die Koordinaten $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ parallel; ſo iſt ZXY die Umdrehungsebene des Punktes Z, alſo XZ ſeine ſenkrechte Entfernung von der Axe, und wenn dieſe $= r$ geſetzt wird, ſeine Geſchwindigkeit $= \gamma r$; folglich die Schwungkraft der Maſſe $dM = \frac{\gamma^2}{2g} . rdM$, die dem Punkt X der Axe nach der Richtung XZ fortzuziehen ſtrebt.

2) Man zerlege ſie in zwey andere Kräfte nach den beyden mit IB und IC parallelen Richtungen XY und XV, ſo erhält man nach XY die Kraft $\frac{\gamma^2}{2g} . rdM . \text{Cos}\ ZXY = \frac{\gamma^2}{2g} . ydM$, und nach XV die Kraft $\frac{\gamma^2}{2g} . rdM\ \text{Sin}\ ZXY = \frac{\gamma^2}{2g} . zdM$.

3) Auf ſolche Art entſpringen alſo aus allen den Schwungkräften der einzelnen Elemente im Körper zweyerley Kräfte, deren Richtungen mit IB und IC pa-

rallel sind, und die sich folglich auf zwey einfache, nach eben den Richtungen wirkende, Kräfte zurückführen lassen.

4) Es sey E der gemeinschaftliche Schwerpunkt aller der parallelen Kräfte $\frac{\gamma^2}{2g} . ydM$, worin ihre Summe $\frac{\gamma^2}{2g} \int ydM$ nach Ee, parallel IB, angebracht, ihnen äquipollent ist; seine Entfernung IE von I = f, so erhält man:

$$\frac{\gamma^2 f}{2g} . \int ydM = \frac{\gamma^2}{2g} \int xydM, \text{ folglich } f = \frac{\int xydM}{\int ydM}.$$

5) Ferner sey F der Punkt, worin alle die parallelen Kräfte $\frac{\gamma^2}{2g} . zdM$ nach der mittlern Richtung Ff in eine Summe $\frac{\gamma^2}{2g} \int zdM$ gebracht werden können, und seine Entfernung IF von I = h, so wird gleichergestalt:

$$\frac{\gamma^2 h}{2g} \int zdM = \frac{\gamma^2}{2g} \int xzdM, \text{ mithin } h = \frac{\int xzdM}{\int zdM}.$$

6) Es wird demnach die gesammte Wirkung der Schwungkräfte auf die Axe durch die beyden Kräfte P = $\frac{\gamma^2}{2g} \int ydM$ und Q = $\frac{\gamma^2}{2g} \int zdM$, wenn man sie in E und F nach den entgegengesetzten Richtungen eE und fF anbringt, aufgehoben, und folglich die Axe durch sie verlangtermaaßen in Ruhe erhalten.

§. 277.

Man kann auch noch jede der beyden Kräfte P und auf zwey gegebene Punkte der Axe vertheilen, und durch finden, welche Gewalt die Axe in diesen beyden nkten von den Schwungkräften des Körpers leiden ß, wenn sie daselbst gehalten, oder durch feste Ringe geschlossen wird. Wir wollen setzen, es seyen in I A die Kräfte R, S, parallel mit IB, der Kraft P, in eben den Punkten die Kräfte V, W, parallel IC, der Kraft Q äquipollent, so ist zuvörderst

$$P = R + S, \quad Q = V + W$$

, wenn wir IA = a, IE = f, IF = h nennen:

$$Rf = S(a - f), \quad Vh = W(a - h),$$

$$Sa = (R + S)f = Pf; \quad S = \frac{Pf}{a}, \quad R = P\left(1 - \frac{f}{a}\right),$$

$$Wa = (V + W)h = Qh; \quad W = \frac{Qh}{a}, \quad V = Q\left(1 - \frac{h}{a}\right),$$

r, für P, Q, f und h ihre Werthe substituirt:

$$R = \frac{\gamma^2}{2ag}(a\int ydM - \int xydM), \quad S = \frac{\gamma^2}{2ag}\int xydM,$$

$$V = \frac{\gamma^2}{2ag}(a\int zdM - \int xzdM), \quad W = \frac{\gamma^2}{2ag}\int xzdM.$$

§. 278.

Von diesen vier Kräften sind R und S im Punkte so wie V und W im Punkte A senkrecht aufeinan; sie können sich also nie gegen einander aufheben, r, die Kräfte, die aus ihrer Zusammensetzung ent- ingen, können nie = o seyn, wofern nicht jede für

sich genommen $= 0$ ist. Soll demnach die vereinigte Wirkung aller Schwungkräfte auf die Axe verschwinden, so muß solches auch bey den vier Kräften R, S, V, W, einzeln genommen, nothwendig der Fall seyn. Man hat also unter dieser Voraussetzung zuerst:

$$\int xy\,dM = 0,\ \int xz\,dM = 0,$$

und weil dadurch $R = \frac{\gamma^2}{2g}\int y\,dM$, $V = \frac{\gamma^2}{2g}\int z\,dM$ wird, und diese beyden Kräfte ebenfalls verschwinden müssen, so erhält man ferner

$$\int y\,dM = 0,\ \int z\,dM = 0.$$

§. 279.

Man nennt eine solche Axe, die, während der Körper sich um sie dreht, von den Schwungkräften seiner Theile keine Gewalt leidet, eine freye Axe des Körpers. Sie ist nach vorigem §. folgenden Bedingungen unterworfen:

Fig. 67. 1. Wenn man sie zur Abscissenlinie der Ordinaten $Op = x$ annimmt, so müssen zuvörderst die Integrale $\int y\,dM$ und $\int z\,dM$ durch den ganzen Körper genommen, beyde $= 0$ seyn. Da nun für den Schwerpunkt g des Körpers die Ordinate $ef = \frac{\int y\,dM}{M}$, und $fg = \frac{\int z\,dM}{M}$ ist, so folgt: daß eine Axe des Körpers nicht frey seyn könne, wofern sie nicht durch seinen Schwerpunkt gehe.

2. Ferner wird auch noch erfordert, daß so [illegible] $\int xy\,dM$, wie auch $\int xz\,dM = 0$ sey.

§. 280.

Ein feſter Körper, der um eine freye Axe eine Umdrehung bekommt, und dabey von keiner fremden Kraft getrieben wird, ſetzt dieſe Umdrehung um ſie mit der einmal erhaltenen Winkelgeſchwindigkeit unverändert fort: die Axe aber bleibt unbeweglich, gleichſam wie eine feſte Axe, in ihrer anfänglichen Lage, ohne daß irgend eine Kraft, ſie zu halten, erfordert würde.

Da nemlich keine äußern Kräfte auf die Axe wirken, und ſie, als freye Axe, auch keine Gewalt von den Schwungkräften leidet, die durch die Umdrehung des Körpers um ſie hervorgebracht werden; ſo folgt nothwendig, daß ſie in Ruhe bleiben, und der Körper fortfahren müſſe, ſich um ſie, wie um eine feſte Axe zu drehen.

Hierbey bewegt ſich jedes ſeiner Elemente in einem auf die Axe ſenkrechten Kreiſe, und iſt während dieſer Bewegung keiner andern Kraft, als der Centralkraft ausgeſetzt, die bloß verhindert, daß es ſich nicht von ſeinem Mittelpunkte entferne, alſo in ſeiner Geſchwindigkeit keine Aenderung bewirkt; daher denn auch der ganze Körper ſeine anfängliche Winkelgeſchwindigkeit unverändert beybehält.

§. 281.

Fig. 35. **Aufgabe.** Die Lage einer freyen Axe IG im Körper gegen drey Linien IA, IB und IC zu beſtimmen, die ſich in ſeinem Schwerpunkte I ſenkrecht durchſchneiden.

Aufl. 1) Eine Ebene durch IG und IC gelegt, steht auf der Ebene AIB senkrecht, und wenn also beyde in IF sich schneiden, so wird durch die Winkel AIF = und FIG = δ die Lage der Axe IG verlangtermaßen bestimmt. Es kommt also darauf an, die Werthe dieser Winkel aus Größen, die aus der Beschaffenheit des Körpers bekannt sind, herzuleiten.

2) Man ziehe mit IA, IB und IC für ein Element dM bey Z die Koordinaten IX = x, XY = y, YZ = z parallel, und nehme an, daß zwischen diesen für Punkte in der Oberfläche eine Gleichung gegeben sey. Da sie aber auf die Axe IG weiter keinen Bezug haben, fälle man ZY′ auf die Ebene CIF, und in derselben Y′X′ auf IG senkrecht, und setze IX′ = x′, X′Y′ = y′, Y′Z = z′, so hat man als Bedingungsgleichungen der freyen Axe IG:

$$\int x'y'dM = 0, \quad \int x'z'dM = 0.$$

Die andern beyden (§. 279. 1.) liegen schon in der Voraussetzung, daß IG und IA im Schwerpunkte des Körpers zusammentreffe, und folglich dieser Punkt in IG hineinfalle.

3) Um die Koordinaten x′, y′ und z′ auf die drey erstern zurückzuführen, fälle man noch in der Ebene CIF aus Y′ auf IF das Perpendikel Y′W, und ziehe YW, so entsteht dadurch das Parallellogram YZY′W: denn Y′W ist auf AIB senkrecht (1), folglich mit ZY parallel, und ZY′, YW sind beyde auf Y′W senkrecht; ersteres, weil es auf der Ebene CIF senkrecht ist; letzteres, weil es in der Ebene AIB liegt, worauf Y′W

nkrecht ſteht; alſo ſind auch ZY' und YW parallel. s iſt daher:

$$Y'W = ZY = z, \text{ und } YW = ZY' = z'.$$

4) Es ſey nun o der Durchſchnitt von XY und , ſo iſt im rechtwinklichten Dreyecke IoX

$$Io = \frac{IX}{\cos \eta} = \frac{x}{\cos \eta}, \quad Xo = x \tan \eta,$$

ıd da im Dreyecke YOW der Winkel bey W ebenfalls n rechter iſt:

$$Yo = \frac{YW}{\cos \eta} = \frac{z'}{\cos \eta}, \quad Wo = z' \tan \eta.$$

olglich $y = Xo + oY = x \tan \eta + \frac{z'}{\cos \eta}$, oder

$= y \cos \eta - x \sin \eta$; und $IW = Io + oW =$

$\frac{x}{\cos \eta} + z' \tan \eta = y \sin \eta + x \left(\frac{1 - \sin \eta^2}{\cos \eta}\right) =$

$\cos \eta + y \sin \eta$.

5) Ferner ſey q der Durchſchnitt der Linie Y'W it der Axe IG, ſo hat man im rechtw. ΔIqW

$$Iq = \frac{IW}{\cos \vartheta} = \frac{x \cos \eta + y \sin \eta}{\cos \vartheta}, \quad qW = IW$$

$$\tan \vartheta = (x \cos \eta + y \sin \eta) \tan \vartheta$$

ıd in dem daranſtoßenden rechtw. $\Delta X'qY'$:

$$X'q = X'Y' \tan \vartheta = y' \tan \vartheta, \quad Y'q = \frac{X'Y'}{\cos \vartheta} = \frac{y'}{\cos \vartheta}$$

ithin $z = Y'q + qW = \frac{y'}{\cos \vartheta} + (x \cos \eta + y$

$n \eta) \tan \vartheta$, oder

$$y' = z \cos \vartheta - (x \cos \eta + y \sin \eta) \sin \vartheta$$

und endlich $x' = Iq + qX' = \frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi}{\cos \vartheta} +$

$y' \operatorname{tang} \vartheta = z \sin \vartheta + (x \cos \varphi + y \sin \varphi) \cos$

6) Man ſetze noch zur Abkürzung $x \cos \varphi + y \sin \varphi = u$, ſo wird $x' = z \sin \vartheta + u \cos \vartheta$, und $y' = z \cos \vartheta - u \sin \vartheta$, folglich $x'y' = (z^2 - u^2) \sin \vartheta \cos \vartheta + uz\,(1 - 2 \sin \vartheta^2) = \frac{1}{2} \sin 2\vartheta\,(z^2 - u^2) + \cos 2\vartheta \cdot uz$; daher verwandelt ſich die erſte Gleichung (2) in:

$$\cos 2\vartheta \int uz\,dM - \tfrac{1}{2} \sin 2\vartheta \int (u^2 - z^2)\,dM = 0,$$

woraus $\operatorname{tang} 2\vartheta = \frac{2 \int uz\,dM}{\int (u^2 - z^2)\,dM}$ folgt,

und die zweyte in:

$$\sin \vartheta \int zz'\,dM + \cos \vartheta \int uz'\,dM = 0,$$

welche $\operatorname{tang} \vartheta = \frac{-\int uz'\,dM}{\int zz'\,dM}$ giebt.

7) Hierin für u und z' (+) ihre Werthe geſetzt, erhält man:

$\int uz\,dM = \cos \varphi \int xz\,dM + \sin \varphi \int yz\,dM$

$\int (u^2 - z^2)\,dM = \cos \varphi^2 \int x^2\,dM + 2 \cos \varphi \sin \varphi \int xy\,dM + \sin \varphi^2 \int y^2\,dM - \int z^2\,dM$

$\int uz'\,dM = \sin \varphi \cos \varphi \int (y^2 - x^2)\,dM + (\cos \varphi^2 - \sin \varphi^2) \int xy\,dM.$

$\int zz'\,dM = \cos \varphi \int yz\,dM - \sin \varphi \int xz\,dM,$

lauter Ausdrücke, in denen der unbekannte Winkel φ mit Integralgrößen verbunden iſt, die ſich aus der zwiſchen x, y und z gegebenen Gleichung leicht berechnen laſſen. Unter dieſer Vorausſetzung nenne man:

$\int x^2 dM = A$, $\int y^2 dM = B$, $\int z^2 dM = C$,
$\int xy dM = D$, $\int xz dM = E$, $\int yz dM = F$,

so wird:

$$\tang 2\vartheta = \frac{2E \Cos \varphi + 2F \Sin \varphi}{A \Cos \varphi^2 + B \Sin \varphi^2 - C + 2D \Sin \varphi \Cos \varphi},$$

und

$$\tang \vartheta = \frac{(B - A) \Sin \varphi \Cos \varphi + D (\Cos \varphi^2 - \Sin \varphi^2)}{E \Sin \varphi - F \Cos \varphi}.$$

8) Nach der bekannten Formel: $\tang 2\vartheta = \frac{2 \tang \vartheta}{1 - \tang \vartheta^2}$ könnten nun diese beyden Werthe unmittelbar mit einander verglichen werden; weil aber die Rechnung etwas mühsam ist, so setze man zuvor nach $\tang \vartheta = \frac{m}{n}$, $\tang 2\vartheta = \frac{2p}{q}$; hierdurch bekommt man $p (n^2 - m^2) = mnq$, oder $pn^2 = m (mp + nq)$, und wenn man für m, n, p und q jetzt ihre Werthe substituirt:

$$mp + nq = E (B \Sin \varphi - C \Sin \varphi + D \Cos \varphi) - F (A \Cos \varphi - C \Cos \varphi + D \Sin \varphi),$$

also:

$$(E \Cos \varphi + F \Sin \varphi) (E \Sin \varphi - F \Cos \varphi)^2 = [(B - A) \Sin \varphi \Cos \varphi + D (\Cos \varphi^2 - \Sin \varphi^2)] \times [E (B \Sin \varphi - C \Sin \varphi + D \Cos \varphi) - F (A \Cos \varphi - C \Cos \varphi + D \Sin \varphi)].$$

9) Beyderseits noch durch $\Cos \varphi$ und $\Cos \varphi^2$ dividirt, und dann $\tang \varphi = t$ gesetzt, giebt ferner:

$$(E + Ft) (F - Et)^2 = [D + (B - A) t - Dt^2] . [DE - AF + CF + (BE - CE - DF)$$

t], oder wenn man diese Gleichung nach den Potenzen von t ordnet:

$$o = (F^2 - D^2)E + (A - C)DF$$
$$+ t(F^3 - (2E^2 - D^2)F + (A - 2B + C)DE - (A - B)(A - C)F)$$
$$+ t^2(E^3 - (2F^2 - D^2)E + (B - 2A + C)DF + (A - B)(B - C)E)$$
$$+ t^3[(E^2 - D^2)F + (B - C)DE].$$

10) Hat man daraus den Werth von t, also den Winkel ϑ, bereits gefunden, so wird dann auch (q).

$$\text{tang } \vartheta = \frac{\frac{1}{2}(B - A)\sin 2\vartheta + D\cos 2\vartheta}{E\sin\vartheta - F\cos\vartheta}.$$

§. 282.

Die kubische Gleichung (9) hat wenigstens eine mögliche Wurzel, und folglich der Körper zum mindesten eine freye Axe. Um zu erfahren, ob es deren noch mehrere in ihm geben müsse, nehme man die schon gefundene freye Axe jetzt zur Abscissenlinie IA der Ordinaten IX = x an; lege durch sie nach Gefallen die Ebene BIA, und suche eine Gleichung für die Oberfläche des Körpers zwischen IX = x, XY = y, YZ = z; so ist nunmehr: $\int xydM = D = o$, $\int xzdM = E = o$.

Setzt man also für eine andere freye Axe IG, deren Lage nach jener bestimmt werden soll, wie vorhin, die Winkel AIF = ϑ, FIG = Θ, so wird in den beyden Gleichungen (6) gegenwärtig:

$$\int uzdM = F\sin\vartheta \qquad \int zz'dM = F\cos\vartheta$$
$$\int(u^2 - z^2)dM = A\cos\vartheta^2 + B\sin\vartheta^2 - C \qquad \int uz'dM = (B - A)\sin\vartheta\cos\vartheta$$

dadurch ſie folgende Geſtalt bekommen:

$$(A\cos\varphi^2 + B\sin\varphi^2 - C)\sin 2\vartheta - 2F\sin\varphi\cos 2\vartheta = 0$$

$$(A-B)\sin\varphi\cos\varphi\cos\vartheta - F\cos\varphi\sin\vartheta = 0.$$

Da letztere den Faktor $\cos\varphi$ hat, ſo folgt aus ihr $\cos\varphi = 0$, $\varphi = 90°$. Dies für φ in die erſtere Gleichung ubſtituirt, giebt: $(B - C)\sin 2\vartheta - 2F\cos 2\vartheta = 0$; $\operatorname{tang} 2\vartheta = \frac{2F}{B-C}$, woraus für 2ϑ, alſo auch für ϑ, ein doppelter Werth entſpringt. Nennt man nemlich den einen Werth von $2\vartheta = \varepsilon$, ſo iſt der andere $2\vartheta = 180° + \varepsilon$; folglich ſowohl $\vartheta = \frac{1}{2}\varepsilon$, wie auch $= 90° + \frac{1}{2}\varepsilon$.

Man erhält alſo ſolchergeſtalt noch zwey andere freye Axen, die, wegen des rechten Winkels $\eta = AIB$, gemeinſchaftlich in die Ebene BIC hineinfallen, und, weil darin ihr Abſtand 90° beträgt, ſowohl unter ſich, als mit der erſtern IA, einen rechten Winkel einſchlieſſen; woraus der merkwürdige Satz folgt: **daß es, in jedem feſten Körper, er ſey geſtaltet, wie er wolle, drey freye Axen gebe, die ſich in ſeinem Schwerpunkte ſenkrecht durchſchneiden.**

Anmerk. Auf dieſe höchſt wichtige Eigenſchaft an feſten Körpern, die im Jahr 1755 zuerſt durch Herrn von Segner entdeckt wurde, hat Euler in ſ. Theoria motus corp. rigid. ſein ganzes Syſtem der freyen Umdrehungen feſter Körper mit ſehr glücklichem Erfolge gegründet, wodurch dieſe ſonſt ſo ſchwierige Lehre nunmehr zu eben der Einfachheit und Klarheit gediehen iſt, die die Theorie der fortrückenden Bewegung durch den Gebrauch des Schwerpunkts längſthin ſchon bekommen hatte.

§. 283.

Da die drey freyen Axen des Körpers gegenſeitig ſenkrecht auf einander ſtehen, ſo iſt es unſtreitig für die folgenden Unterſuchungen am vortheilhafteſten, ſie zu den drey Richtungslinien IA, IB und IC der Koordinaten x, y, z anzunehmen, und zwiſchen dieſen letztern die Gleichung für die Oberfläche des Körpers zu entwickeln. Dies vorausgeſetzt, hat man nun nicht allein: $\int xydM = o$, und $\int xzdM = o$, ſondern, da die auf der Axe IB genommene Abſciſſe für eben den Punkt Z $= y$ iſt, wird auch noch außerdem $\int yzdM = o$; ſo daß alſo für Koordinaten des Körpers, die ſeinen freyen Axen parallel gezogen werden, das Produkt aus je zweyen derſelben in das dazu gehörige Element der Maſſe, durch den ganzen Körper ſummirt, allemal verſchwindet.

§. 284.

Fig. 6. 1. Bey allen runden Körpern, d. i. ſolchen, die durch Umdrehung einer ebenen Figur AMDB um ihre Axe AB entſtanden ſind, iſt dieſe Linie AB ſelbſt, eine von den freyen Axen: denn indem ſich der Körper um AB dreht, iſt jeder auf AB ſenkrechte Querſchnitt eine Umdrehungsebene, worin allezeit zwey gleiche Elemente in gleichen Entfernungen von der Axe einander gegenüber liegen, deren Schwungkräfte alſo, weil ſie gleich und entgegengeſetzt ſind, ſich aufheben.

2. Die andern freyen Axen des runden Körpers liegen beyde in dem, durch ſeinen Schwerpunkt gehenden,

auf AB ſenkrechten Querſchnitte, und ſind alſo Durchmeſſer deſſelben. Da aber alle Durchmeſſer dieſes Querſchnittes gegen den ganzen Körper völlig einerley Lage haben, ſo folgt, daß ſie insgeſammt, einer wie der andere, freye Axen deſſelben ſeyn müſſen.

3. Um einzuſehen, wie dieſe ſonderbare Eigenſchaft des Konoids, mit der allgemeinen Formel $\text{tang } 2\vartheta = \frac{2F}{B-C}$ (§. 282.) ſich vereinigen laſſe, wähle man die Axe AB zur Abſciſſenlinie der Ordinaten x, und errichte aus dem Schwerpunkte darauf nach Gefallen eine andere Axe ſenkrecht, ſo iſt dieſe ebenfalls eine freye Axe, mithin $\int yzdM = F = 0$ (§. 283.). Auſſerdem iſt aber, wie leicht aus der Beſchaffenheit des Kreiſes erhellet, $\int y^2dM = \int z^2dM$, oder $B = C$, folglich $\text{tang } 2\vartheta = \frac{0}{0}$, ſo daß alſo die Formel für dieſen beſondern Fall den Winkel ϑ unbeſtimmt läßt.

4. Bey der Kugel iſt jede durch ihren Schwerpunkt gehende Linie, oder jeder ihrer Durchmeſſer, eine freye Axe.

§. 285.

Ueberhaupt iſt in jedem feſten Körper, deſſen centriſche Linie *) gerade iſt, dieſe Linie zugleich eine freye Axe.

*) In der engern Bedeutung hier genommen, wobey die einzelnen Querſchnitte des ganzen Körpers, durch deren Schwerpunkt ſie geht, zugleich ſenkrecht auf ihr ſeyn müſſen.

Beweis. 1) Man nehme sie zur Abscissenlinie der Ordinaten x an, denke sich den ganzen Körper in lauter unendlich schmale, auf ihr senkrechte, Querschnitte getheilt, und ziehe in einem dieser Querschnitte die beyden andern Koordinaten y und z. Da die centrische Linie durch dessen Schwerpunkt geht, so ist für ihn, wenn wir seine Masse m nennen, $\int ydm$, so wie $\int zdm = o$, und weil hierbey x beständig ist, auch $\int xydm = x\int ydm = o$, und $\int xzdm = x\int zdm = o$.

2) Es sind also von jedem einzelnen Querschnitte des Körpers die Integrale $\int xydm$ und $\int xzdm = o$, folglich auch von allen zusammengenommen, oder nach x summirt, d. h. die vollständigen Integrale $\int xydM$ und $\int xzdM$ für den ganzen Körper, $= o$.

3) Daß die andern beyden Integrale $\int ydM$ und $\int zdM$ ebenfalls $= o$ seyn müssen, folgt schon daraus, weil die gedachte Linie durch die Schwerpunkte aller einzelnen Querschnitte, also auch durch ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt, oder durch den Schwerpunkt des ganzen Körpers geht.

§. 286.

Solcher Körper giebt es außer den Konoiden noch eine Menge anderer, wohin z. B. die senkrechten Prismen, ganzen und abgekürzten Pyramiden gehören. Wir wollen unter diesen hier bloß das rechtwinklichte Parallelepipedum näher betrachten:

Fig. 24. Es sey I dessen Schwerpunkt; BIG ein der Grundfläche paralleler Querschnitt, IA senkrecht dar-

auf; so ist zuvörderst diese Linie eine von den drey freyen Axen. Da aber auch die andern Seitenflächen eben so gut als Grundflächen angenommen werden können, auf denen das Parallelepipedum senkrecht steht, so sind IB und IC die andern beyden freyen Axen. Eben dies zeigt uns die Formel $\text{tang } 2\vartheta = \frac{2F}{B-C}$ auf folgende Art:

Man nenne die Masse des Parallepipedum $= M$, seine Höhe $= a$, die mit IB und IC parallelen Seiten der Grundfläche $= b$ und c, so erhält man $\int y^2 dM = B = \frac{1}{12} Mb^2$, und $\int z^2 dM = C = \frac{1}{12} Mc^2$, also $B - C = \frac{1}{12} M(b^2 - c^2)$. Ferner $\int yz dM = F = o$, weil darin die gleichen und entgegengesetzten y und z einander aufheben; folglich $\text{tang } 2\vartheta = o$; $2\vartheta = o$ und $180°$; $\vartheta = o$ und $90°$, d. h. die andere freye Axe fällt in IB, und die dritte in IC.

Ist aber $b = c$, so wird $\text{tang } 2\vartheta = \frac{o}{o}$, also bleibt dann der Winkel ϑ unbestimmt, oder kann genommen werden, wie man will; daher sind in einem Parallellepipedum, dessen Grundfläche ein Quadrat ist, alle mit der Grundfläche durch den Schwerpunkt parallel gezogene Linien, freye Axen desselben.

§. 287.

Fig. 33. **Aufgabe.** Die Momente der Trägheit eines Körpers Ma^2, Mb^2, Mc^2 in Bezug auf seine drey freyen Axen IA, IB, IC sind gegeben; man sucht sein Moment der Trägheit für irgend eine andere durch sei-

nen Schwerpunkt gezogene Axe IG, die mit jenen die Winkel AIG $= \alpha$, BIG $= \beta$, und CIG $= \gamma$ macht.

Aufl. 1) Man fälle aus dem Orte Z des Elements dM auf die Axe IG das Perpendikel IX', und setze dies $= r$, so ist das gesuchte Moment der Trägheit, das wir Mh^2 nennen wollen, $= \int r^2 dM$.

2) Nun giebt zuvörderst die bloße Betrachtung der Figur:

$$x^2 + y^2 + z^2 = ZI^2 = IX''^2 + X'Z^2 = x''^2 + r^2$$

also: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - x''^2$,

Ferner hat man aus §. 281. N. 5.

$$x' = x \operatorname{Cos} \eta \operatorname{Cos} \vartheta + y \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Cos} \vartheta + z \operatorname{Sin} \vartheta,$$

oder, da in den beyden an IF rechtwinklichten Ecken IFGA, und IFGB, $\operatorname{Cos} \alpha = \operatorname{Cos} \eta \operatorname{Cos} \vartheta$, $\operatorname{Cos} \beta = \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Cos} \vartheta$, und außerdem $\operatorname{Sin} \vartheta = \operatorname{Cos} \gamma$ ist:

$$x' = x \operatorname{Cos} \alpha + y \operatorname{Cos} \beta + z \operatorname{Cos} \gamma,$$

folglich wird:

$$r^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (x \operatorname{Cos} \alpha + y \operatorname{Cos} \beta + z \operatorname{Cos} \gamma)^2$$
$$= x^2 \operatorname{Sin} \alpha^2 + y^2 \operatorname{Sin} \beta^2 + z^2 \operatorname{Sin} \gamma^2 - 2xy \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta$$
$$- 2xz \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \gamma - 2yz \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \gamma$$

und, wenn man sich der im §. 281. N. 7. gebrauchten Bezeichnungen bedient:

$$\int r^2 dM = A \operatorname{Sin} \alpha^2 + B \operatorname{Sin} \beta^2 + C \operatorname{Sin} \gamma^2 - 2D \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \beta - 2E \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \gamma - 2F \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \gamma.$$

3) Da aber die Axen, worauf sich x, y und z beziehen, freye Axen sind, so ist hier D, E und $F = 0$; es bleibt also noch übrig:

$$\int r^2 dM = A \operatorname{Sin} \alpha^2 + B \operatorname{Sin} \beta^2 + C \operatorname{Sin} \gamma^2$$

4) Nun

4) Nun ist $Ma^2 = \int (y^2 + z^2)\, dM = B + C$

$Mb^2 = \int (x^2 + z^2)\, dM = A + C$

$Mc^2 = \int (x^2 + y^2)\, dM = A + B$

$\frac{1}{2} M (a^2 + b^2 + c^2) = A + B + C$

mithin $A = \frac{1}{2} M (b^2 + c^2 - a^2)$, $B = \frac{1}{2} M (a^2 + c^2 - b^2)$, $C = \frac{1}{2} M (a^2 + b^2 - c^2)$.

Diese Werthe für A, B und C in 3 substituirt, ben:

$Mh^2 = \frac{1}{2} M \operatorname{Sin} \alpha^2 (b^2 + c^2 - a^2) + \frac{1}{2} M \operatorname{Sin} \beta^2 (a^2 + c^2 - b^2) + \frac{1}{2} M \operatorname{Sin} \gamma^2 (a^2 + b^2 - c^2)$

$= \frac{1}{2} M [a^2 (\operatorname{Sin} \beta^2 + \operatorname{Sin} \gamma^2 - \operatorname{Sin} \alpha^2) + b^2 (\operatorname{Sin} \alpha^2 + \operatorname{Sin} \gamma^2 - \operatorname{Sin} \beta^2) + c^2 (\operatorname{Sin} \alpha^2 + \operatorname{Sin} \beta^2 - \operatorname{Sin} \gamma^2)]$.

5) Hierin wird noch, weil $\operatorname{Cos} \alpha^2 + \operatorname{Cos} \beta^2 + \operatorname{Cos} \gamma^2 = 1$ ist,

$\operatorname{Sin} \beta^2 + \operatorname{Sin} \gamma^2 = 1 + \operatorname{Cos} \alpha^2 - (\operatorname{Cos} \beta^2 + \operatorname{Cos} \gamma^2) = 2 \operatorname{Cos} \alpha^2$,

ıd auf gleiche Weise:

$\operatorname{Sin} \alpha^2 + \operatorname{Sin} \gamma^2 - \operatorname{Sin} \beta^2 = 2 \operatorname{Cos} \beta^2$, $\operatorname{Sin} \alpha^2 + \operatorname{Sin} \beta^2 - \operatorname{Sin} \gamma^2 = 2 \operatorname{Cos} \gamma^2$;

ıher bekommt man endlich:

$Mh^2 = Ma^2 \operatorname{Cos} \alpha^2 + Mb^2 \operatorname{Cos} \beta^2 + Mc^2 \operatorname{Cos} \gamma^2$.

§. 288.

1. Will man aus der gefundenen Formel den drit- n Winkel γ, der offenbar von den andern beyden α nd β abhängig ist, herausschaffen, so darf man nur ir $\operatorname{Cos} \gamma^2$ seinen Werth $1 - \operatorname{Cos} \alpha^2 - \operatorname{Cos} \beta^2$ setzen. ierdurch erhält man:

$$Mh^2 = Mc^2 + M(a^2 - c^2)\cos\alpha^2 + M(b^2 - c^2)\cos\beta^2.$$

2. Man kann auch zur Bestimmung der Lage der Axe IG die beyden Winkel $AIF = \eta$ und $FIG = \vartheta$ nehmen, und diese statt der Winkel α, β und γ in die Formel einführen. Zu dem Ende wird (§. 287. 2.) $\cos\alpha = \cos\eta\cos\vartheta$, $\cos\beta = \sin\eta\cos\varphi$, $\cos\gamma = \sin\vartheta$, mithin:

$$Mh^2 = Ma^2\cos\eta^2\cos\vartheta^2 + Mb^2\sin\eta^2\cos\varphi^2 + Mc^2\sin\vartheta^2.$$

3. Läßt man bey runden Körpern Mc^2 das Moment der Trägheit für die Polaraxe bedeuten, so beziehen sich Ma^2 und Mb^2 auf die Durchmesser des durch den Schwerpunkt gehenden Querschnittes, und sind folglich einander gleich. Man bekommt also für solche Körper

$$Mh^2 = Ma^2\cos\vartheta^2 + Mc^2\sin\vartheta^2,$$

wo ϑ das Komplement des Winkels ist, den die schiefe Axe IG mit der Polaraxe IC am Schwerpunkte einschließt.

Exempel. Es sey von einem Sphäroid die halbe Polaraxe $= e$, der Halbmesser des Aequators $= f$; man sucht sein Moment der Trägheit gegen eine Axe, die durch seinen Mittelpunkt geht, und gegen den Aequator unter dem Winkel ϑ geneigt ist. Hier ist $c^2 = \frac{2}{5}f^2$ (§. 212. 3.) und $a^2 = \frac{1}{5}(e^2 + f^2)$ (§. 214. 4.), folglich

$$Mh^2 = \tfrac{1}{5}M[(e^2 + f^2)\cos\vartheta^2 + 2f^2\sin\vartheta^2] = \tfrac{1}{5}M[e^2\cos\vartheta^2 + f^2(1 + \sin\vartheta^2)].$$

§. 289.

Aufgabe. Die Lage derjenigen Axe im Körper zu bestimmen, wofür sein Moment der Trägheit am kleinsten ist.

Aufl. 1) Eine Axe, die diese Eigenschaft haben soll, muß nothwendig durch den Schwerpunkt des Körpers gehen: denn für jede andere Axe ist (§. 208. 2.) das Moment der Trägheit größer, als für die durch den Schwerpunkt ihr parallel gezogene; daher man nur für Axen letzterer Art die Untersuchung anzustellen braucht.

2) Diesem zufolge differenziire man die vorhin erhaltene Gleichung

$$h^2 = c^2 + (a^2 - c^2)\,\mathrm{Cos}\,\alpha^2 + (b^2 - c^2)\,\mathrm{Cos}\,\beta^2$$

sowohl nach α als nach β, und setze beyde Differenziale $= 0$. Man bekommt solchergestalt:

$$0 = (a^2 - c^2)\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha, \text{ und}$$

$$0 = (b^2 - c^2)\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,\beta.$$

4) Hieraus entspringen folgende Werthe für α und β

$\mathrm{Sin}\,\alpha = 0$, $\mathrm{Cos}\,\alpha = 0$; $\mathrm{Sin}\,\beta = 0$, $\mathrm{Cos}\,\beta = 0$

$\alpha = 0,\ 90^\circ$; $\beta = 0,\ 90^\circ$,

die sich auf vierfache Art mit einander verbinden lassen:

4) Die erste Kombination $\alpha = 0$, $\beta = 0$, ist unmöglich, weil die Axe nicht zugleich in IA und IB hineinfallen kann.

Vermöge der zweyten $\alpha = 0$, $\beta = 90^\circ$, kommt die gesuchte Axe in IA zu liegen;

vermöge der dritten $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 0$, in IB, und

nach der vierten . $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$, steht sie auf beyden senkrecht,

und fällt daher mit der dritten freyen Axe IC zusammen.

5) Hier zeigt sich uns also eine neue merkwürdige Eigenschaft der freyen Axen, die darin besteht, daß das Moment der Trägheit des Körpers in Ansehung ihrer ein Minimum ist. Aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, pflegt man sie auch wohl mit Euler noch besonders die drey Hauptaxen des Körpers zu nennen.

Zehntes Kapitel.

Von der gemischten Bewegung fester Körper.

§. 290.

Fig. 34. **Lehrsatz.** Wenn ein fester Körper um drey Axen IA, IB, IC, die sich in einem seiner Punkte I senkrecht durchschneiden, zu gleicher Zeit drey Winkelgeschwindigkeiten ϑ, ω, π bekommt, so dreht er sich mit der einfachen Winkelgeschwindigkeit $\sigma = \sqrt{(\vartheta^2 + \omega^2 + \pi^2)}$ um eine mittlere Axe IG, deren Lage vermittelst der drey Winkel AIG $= \alpha$, BIG $= \beta$, und CIG $= \gamma$ durch folgende Proportion bestimmt wird.

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \vartheta : \omega : \pi$$

Beweis. 1) Es sey aus einem beliebigen Punkte Z des Körpers ZY auf die Ebene AIB, und in derselben

ı YZ auf IA ſenkrecht, wodurch man alſo für dieſen ınkt die drey rechtwinklichten Koordinaten IX = x, ′ = y und YZ = z erhält, die mit IA, IB und IC :allel laufen. Außerdem ſey noch ZX = r; ſo be= gt ſich der Punkt Z, vermöge der Umdrehung des rpers um IA nach Zz, ſenkrecht auf ZX, mit einer ſchwindigkeit = ϑr.

2) Man zerlege dieſe in eine nach YZ, parallel t IC, und in eine darauf ſenkrechte, parallel mit IB. ſtere wird, weil ſie nach ZY gerichtet iſt, folglich ſe Ordinate vermindert, = — ϑr Cos ZXY = — r; letztere = ϑr Sin ZXY = ϑz.

3) Auf gleiche Weiſe entſpringen aus der Umdre= ng des Körpers um IB für den Punkt Z nach den den mit IC und IA parallelen Richtungen die Ge= windigkeiten πy und — πx, wovon man ſich durch e ähnliche Zeichnung, wie für die Axe IA hier ent= rfen iſt, ſehr leicht überzeugen kann.

4) Dieſe einzelnen Geſchwindigkeiten nach jeder drey Richtungen IA, IB, IC beſonders addirt, ge= ı für den Punkt Z:

nach IA die Geſchwindigkeit $\frac{dx}{dt} = \omega z - \pi y$,

nach IB . . . $\frac{dy}{dt} = \vartheta z - \pi x$,

nach IC . . . $\frac{dz}{dt} = \omega x - \vartheta y$.

5) Hieraus laſſen ſich nun zunächſt die Punkte Körper beſtimmen, die bey ſeiner dreyfachen Umdre=

hung in Ruhe bleiben. Man hat nemlich für diß $\frac{dx}{dt} = o$, $\frac{dy}{dt} = o$, $\frac{dz}{dt} = o$, folglich:

$$\omega z = \pi y, \quad \gamma z = \pi x, \quad \omega x = \gamma y$$

oder $x : y : z = \gamma : \omega : \pi$,

Fig. 35. wodurch eine gerade Linie IG angedeutet wird, die mit den drey ſenkrechten Axen in dem gemeinſchaftlichen Punkte I zuſammenläuft.

6) Dieſe Linie bleibt alſo bey der Bewegung des Körpers unverändert in ihrer Lage, und iſt daher die Axe, um welche ſich der Körper dreht. Man fälle noch auf ſie aus Z das Perpendikel ZX', und nenne die Koordinaten des Punktes X', parallel mit IA, IB und IC, $= X$, Y und Z; ſo wird $X : Y : Z = \gamma : \omega : \pi$. Ferner, wenn man die beyden Winkel AIF und FIG $= \eta$ und ϑ ſetzt,

$IX' \sin \vartheta = Z$, $IX' \cos \vartheta \sin \eta = Y$, und $IX' \cos \vartheta \cos \eta = X$, oder

$X : Y : Z = \cos \pi \cos \vartheta : \sin \pi \cos \vartheta : \sin \vartheta =$ $\cos \alpha : \cos \beta \cos \gamma$ (§. 287. 2.)

mithin $\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = \gamma : \omega : \pi$.

7) Man erhält daraus $\gamma^2 \cos \beta = \omega^2 \cos \alpha^2$, und $\gamma^2 \cos \gamma = \pi^2 \cos \alpha^2$, alſo $(\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2) \cos \alpha^2 = \gamma^2 (\cos \alpha^2 + \cos \beta^2 + \cos \gamma^2) = \gamma^2$; folglich

$$\cos \alpha = \frac{\gamma}{\sqrt{(\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2)}}, \quad \cos \beta = \frac{\omega}{\sqrt{(\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2)}},$$

und $\cos \gamma = \frac{\pi}{\sqrt{(\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2)}}$.

8) Es ſey endlich die Winkelgeſchwindigkeit des

Körpers um die Axe IG$=\sigma$; die Entfernung ZX'$=w$; so ist σw die Geschwindigkeit des Punktes Z in seiner Bahn, und deshalb:

$$\sigma^2 w^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2;$$

Ferner $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \omega^2 z^2 - 2\omega\pi yz + \pi^2 y^2$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \gamma^2 z^2 - 2\gamma\pi xz + \pi^2 x^2,$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \omega^2 x^2 - 2\gamma\omega xy + \gamma^2 y^2$$

folglich $\sigma^2 w^2 = (\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (\gamma x + \omega y + \pi z)^2$;

oder $\frac{\sigma^2 w^2}{\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2} = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(\gamma x + \omega y + \pi z)^2}{\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2}$;

9) Und aus (§. 287. 2.)

$w^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2$;

wovon letzteres Glied, wenn man darin für Cos α, Cos β und Cos γ ihre Werthe substituirt, sich in $\frac{(\gamma x + \omega y + \pi z)^2}{\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2}$ verwandelt.

Diese Gleichung mit der vorhergehenden verglichen, giebt demnach: $\frac{\sigma^2 w^2}{\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2} = w^2$, also $\sigma = \sqrt{(\gamma^2 + \omega^2 + \pi^2)}$.

§. 291.

Hieraus folgt gegenseitig, daß man jede einfache Umdrehung eines festen Körpers als zusammengesetzt

§. 294.

Fallen die beyden Ebenen baO und BAO in einander, so kann man darin die Linie AO nach Willkühr annehmen. Alsdann fällt die Umdrehungsaxe des Körpers, weil $d\varphi = o$ ist, in Oc hinein, und der Winkel, den er um sie zurückgelegt hat, ist $= d\psi$.

Sind hingegen die gedachten Ebenen einander parallel, so kann man sich vorstellen, ihr Durchschnitt liege unendlich weit vom Körper entfernt, folglich auch seine Umdrehungsaxe. Daher läßt sich das Fortrücken eines Körpers als eine Umdrehung desselben betrachten, die um eine unendlich weit von ihm entlegene Axe geschieht.

§. 295.

Fig. 37. **Lehrsatz.** Wenn ein fester Körper um die Axe IA den Winkel $d\varphi$ beschreibt, und zugleich nach einer auf sie senkrechten Richtung IC um ds fortrückt, so hat er sich während der Zeit um eben den Winkel, und nach eben der Seite zu, um eine unbewegliche Axe OF gedreht, die mit IA in einer auf IC senkrechten Ebene BIA parallel läuft, und darin um $IO = \frac{ds}{d\varphi}$ von ihr entfernt liegt.

Beweis 1) Man fälle aus einem Punkte Z des Körpers auf die Ebene BIA das Perpendikel ZY, und aus Y auf IA noch ein zweytes YX, und setze $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, $XZ = r$, so ist $rd\varphi$ der Raum Zz, den dieser Punkt vermöge der Umdrehung des Körpers um IA zurücklegt.

2) Er zerfällt nach XY und YZ in die Räume $zd\varphi$ und $-ydφ$ (§. 290. 2.), mit welchem letztern sich noch der Raum ds verbindet, um den der Punkt Z nach YZ, parallel IC, zu gleicher Zeit fortrückt, so daß überhaupt: $dx = o$, $dy = zd\varphi$, und $dz = -ydφ + ds$ wird.

3) Für solche Punkte nun, die während der Bewegung des Körpers in Ruhe bleiben, hat man $dx = o$, $dy = o$, $dz = o$, also

$$z = o,\ y = \frac{ds}{d\varphi};$$

woraus erhellet, daß diese Punkte in einer geraden Linie OF liegen, die in die Ebene BIA hineinfällt, und darin von IA um die Weite $\frac{ds}{d\varphi}$ absteht.

4) Man setze den Winkel, den der Körper um die Axe OF beschreibt, $= d\psi$, und die senkrechte Entfernung ZX′ des Punktes Z von ihr $= u$, so bekommt man:

$$u^2 d\psi^2 = dy^2 + dz^2 = z^2 d\varphi^2 + (ydφ - ds)^2$$
$$= d\varphi^2 [z^2 + (y - \frac{ds}{d\varphi})^2]$$

Ferner $u^2 = YZ^2 + YX'^2 = z^2 + (y - \frac{ds}{d\varphi})^2$; folglich:

$$d\psi^2 = d\varphi^2,\ d\psi = d\varphi.$$

5) Weil endlich der Raum, den der Punkt Z vermöge dieser Umdrehung nach YZ durchläuft, ebenfalls negativ ist, wofern $y > \frac{ds}{d\varphi}$ ist, oder Y auf einerley

Seite von IA und OF fällt, so folgt, daß die Umdrehung des Körpers um letztere Axe nach eben der Seite zu geschehe, als um erstere.

§. 296.

Man kann daher auch umgekehrt jedes augenblickliche Drehen des festen Körpers um die ruhende Axe OF als eine Zusammensetzung aus einer andern Umdrehung um eine mit OF parallel gezogne Axe IA, und einem Fortrücken nach der auf die Ebene OIA senkrechten Richtung IC ansehen, und sie in diese beyden einzelnen Bewegungen zerlegen. Es sey nemlich die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die Axe OF $= \gamma$, die Entfernung dieser Axe von der angenommenen IA $= l$, die gesuchte Geschwindigkeit des daraus entspringenden Fortrückens $= v$, so hat man:

$$l = \frac{ds}{d\varphi},\quad \gamma = \frac{d\varphi}{dt};\text{ mithin wird } v = \frac{ds}{dt} = \gamma l,$$

und die Winkelgeschwindigkeit um IA ebenfalls $= \gamma$ (§. 295. 4.).

Da man nun die letztere Axe IA auch durch den Schwerpunkt I ziehen kann, so folgt: daß jede Umdrehung eines Körpers, die um eine ruhende Axe geschieht, folglich auch überhaupt jede augenblickliche Bewegung desselben (§. 293.) in ein Drehen um die durch den Schwerpunkt ihr parallel laufende Axe, und in ein Fortrücken nach der auf die Ebene beyder Axen senkrechten Richtung, sich zerlegen lasse.

§. 297.

So ist z. B. das Fortrollen eines Cylinders auf
nen Boden eine stete Umdrehung desselben um die
ade Linie, worin er jedesmal den Boden berührt.
ennt man also seine Winkelgeschwindigkeit um diese
e = ϑ, die Entfernung seines Schwerpunkts von
. 38. ihr, oder seinen Halbmesser CO = f, so ent-
ingt daraus eine fortrückende Geschwindigkeit = ϑf,
d eine Winkelgeschwindigkeit um die durch den
chwerpunkt gehende Axe, die ebenfalls = ϑ ist.

Daher besteht die wälzende Bewegung des Cylin-
s theils aus einer Umdrehung um seine geometrische
e, und theils aus einem Fortrücken, das, senkrecht
f jene Axe, dem Boden parallel geschieht; und wenn
n das Drehen nach dem Bogen mißt, den ein Punkt
Umfange beschreibt, so sind beyder Geschwindigkei-
einander gleich.

§. 298.

. 39. **Aufgabe.** Ein fester Körper, dessen Masse
M ist, soll um eine Axe OD, die mit der freyen
e IA parallel läuft, die Winkelgeschwindigkeit dϑ
ommen; man sucht die dazu erforderliche Kraft V,
d die Richtung, nach der sie auf den Körper wirken
ß.

Aufl. 1) Man errichte aus dem Schwerpunkte I
s Körpers zwey andere Linien IB und IC sowohl un-
sich, als auf IA senkrecht, und ziehe diesen für ein
ement des Körpers dM bey Z die Koordinaten IX
x, XY = y, YZ = z parallel. Ferner lege man

durch OD eine Ebene, parallel mit BIA, verlängert ZY bis ſie dieſelbe in y ſchneidet, ziehe aus y auf OD das Perpendikel yx, und ſetze $xy = y'$, $yZ = z'$, $xZ = r'$.

2) Dann ſey auch noch Xr auf xy ſenkrecht, oder mit Zy parallel; ſo ſind xr und Xr die Entfernungen der Axe OD von den beyden Ebenen CIA, BIA, und wenn dieſe a und b genannt werden, $y' = a + y$, $z' = b + z$. Außerdem iſt $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ die Entfernung zwiſchen OD und IA, die wir l nennen wollen.

3) Dies vorausgeſetzt, weiß man nun ſchon aus §. 199., daß der Körper verlangtermaßen um die Axe OD gedreht würde, wenn man auf jedes ſeiner Elemente, wie dM, eine Kraft $= \frac{r'dM}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$, ſenkrecht auf xZ, wirken ließe. Daher ſind alle dieſe Kräfte in Verbindung der geſuchten Kraft V äquipollent, und müſſen folglich, nach entgegengeſetzter Richtung angebracht, ihr das Gleichgewicht halten.

4) Könnte man alſo ſie zuſammen auf einen Punkt des Körpers vereinigen, ohne dadurch ihr Gleichgewicht mit V aufzuheben, ſo gäbe dies eine Kraft, die der Kraft V gleich und entgegengeſetzt ſeyn müßte, und folglich ſowohl ihre Größe als Richtung beſtimmte. Man gelangt dazu auf folgende Art:

5) Die Kraft $\frac{r'dM}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$ zerfällt (§. 290. 2.) nach der Richtung ZY in eine $dp = \frac{y'dM}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt} =$

$\frac{(a+y)\,dM}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$, und nach der darauf senkrechten, oder mit XY parallelen Richtung in eine $dq = \frac{z'dM}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{(b+z)\,dM}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$; und ein Gleiches geschieht mit allen den übrigen Umdrehungskräften, die wir uns auf die einzelnen Punkte des ganzen Körpers angebracht denken.

6) Den parallelen Kräften dp ist aber in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte die eine Kraft $p = \frac{d\vartheta}{2gdt} \int (a+y)\,dM = \frac{aM}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$ (§. 279.) äquipollent und die Koordinaten dieses Punktes, der in die Ebene BIA fällt, sind: längs IA $= \frac{\int x dp}{p}$, und senkrecht darauf, oder parallel IB, $= \frac{\int y dp}{p}$.

7) Hierin für p und dp ihre Werthe substituirt, giebt $\frac{\int x dp}{p} = \frac{\int (ax + xy)\,dM}{aM} = \frac{\int x dM}{M} + \frac{\int xy dM}{aM}$ $= o$ (ebendas.); also fällt der Punkt irgendwo in E in die Linie IB, und es ist $IE = \frac{\int y dp}{p} = \frac{\int (ay + y^2)\,dM}{aM}$ $= \frac{\int y^2 dM}{aM}$.

8) Auf gleiche Weise vereinigen sich alle die parallelen Kräfte dq zu ihrer Summe $q = \frac{d\vartheta}{2gdt} \int (b+z)\,dM$

$= \frac{bM}{2g} \cdot \frac{d\gamma}{dt}$ in einen Punkt F der Linie IC, deſſen Entfernung IF von $I = \frac{\int z^2 dM}{bM}$ iſt.

9) Verlängert man nun in der Ebene BIC die Richtungen Ee und Ff der beyden Kräfte p und q bis zu ihrem Durchſchnittspunkte G, und verlegt ſie gemeinſchaftlich auf dieſen Punkt, ſo entſpringt aus ihnen nach einer mittlern Richtung Gg die Kraft $\sqrt{(p^2+q^2)} = \frac{Md\gamma}{2gdt}\sqrt{(a^2+b^2)} = \frac{Mld\gamma}{2gdt}$; der alſo die geſuchte Kraft V gleich iſt.

10) In Anſehung ihrer Richtung gG folgt zunächſt, daß dieſelbe in BIC, d. h. in eine Ebene falle, die die freye Axe IA im Schwerpunkte I ſenkrecht ſchneidet; und was ihre Lage in dieſer Ebene betrift, ſo hat man tang $eGg = \frac{q}{p} = \frac{b}{a} =$ tang Xxr. Zieht man daher auf Xx das Perpendikel Xϱ, ſo iſt $eGg = rX\varrho$, folglich Gg mit Xϱ parallel; woraus alſo ferner erhellet, daß die Richtung der Kraft V auf der Ebene IOD, die durch die beyden Axen IA und OD geht, ſenkrecht ſey.

11) Um endlich ihren Abſtand vom Schwerpunkte I zu beſtimmen, welcher $= f$ ſeyn mag, darf man nur in Erwägung ziehen, daß das Moment der Kraft V gegen die Axe IA, den Momenten der beyden Kräfte p und q gleich ſeyn muß. Dieſem zu Folge wird

$$Vf = p \cdot IE + q \cdot IF \frac{d\gamma}{2gdt} \int (y^2 + z^2)\, dM,$$

oder,

oder, wenn man das Moment der Trägheit des Körpers in Bezug auf die freye Axe $IA = Mh^2$ setzt:

$$Vf = \frac{Mh^2}{2g} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}.$$

§. 299.

Wenn daher auf den ruhenden Körper eine gegebene Kraft V wirkt, die gegen seine freye Axe IA das Moment Vf hat, und deren Richtung in die Ebene der andern beyden freyen Axen fällt, so bekommt er dadurch zu gleicher Zeit eine Winkelgeschwindigkeit $d\vartheta = \frac{2gVfdt}{Mh^2}$ um die Axe IA, und eine fortrückende Geschwindigkeit $ld\vartheta = \frac{2gVdt}{M}$ nach derselben Richtung, die die Kraft hat (§. 295.).

Es ist demnach in Ansehung der fortrückenden Bewegung des Körpers ganz einerley, ob die Richtung der Kraft in der gedachten Ebene durch seinen Schwerpunkt geht, oder nicht; sie bewirkt aber im letztern Falle außerdem noch eine Umdrehung desselben um seine freye Axe, die sich eben so verhält, als wenn diese Axe befestigt wäre.

§. 300.

Fig. 40. **Aufgabe.** Auf einen Körper, der Anfangs in Ruhe ist, wirkt in jedem Augenblicke eine Kraft V, deren Richtung in die Ebene BIC der beyden freyen Axen IB und IC fällt; man sucht die Bewegung desselben.

Aufl. 1) Aus vorigem §. iſt klar, daß der Körper durch die fortgeſetzte Wirkung dieſer Kraft keine andere Umdrehung, als um die dritte ſeiner freyen Axen IA erhalten könne, und ſein Schwerpunkt, der Anfangs in der Ebene BIC lag, auch während ſeines Fortrückens beſtändig darin bleiben müſſe. Es ſey demnach M ſein Ort in dieſer Ebene nach Verlauf einer gegebenen Zeit t; aus ihm ſey MP auf IB ſenkrecht gezogen, und IP $= x$, PM $= y$. Außerdem ſey die Winkelgeſchwindigkeit des Körpers um die Axe IA in eben dem Augenblicke $= \upsilon$.

2) Weil IA eine freye Axe iſt, ſo würde der Körper vermöge ſeiner Trägheit im nächſten Zeittheile dt fortfahren, ſich mit dieſer einmal erhaltenen Winkelgeſchwindigkeit um dieſelbe, wie um eine feſte Axe, zu drehen (§. 280.). Allein die Kraft V ertheilt ihm um eben die Axe, wenn wir ihr Moment gegen ſie $=$ Vf ſetzen, noch ferner die Winkelgeſchwindigkeit $\frac{2gVfdt}{Mh^2}$; alſo iſt dies der augenblickliche Zuwachs, den er zu voriger bekommt, und folglich $d\upsilon = \frac{2gVdt}{Mh^2}$; woraus man

$$\upsilon = \frac{2g}{Mh^2} \int Vfdt \text{ erhält.}$$

3) Was die fortgehende Bewegung des Körpers betrift, ſo wird ſolche durch die Kraft V eben ſo geändert, als wenn ſtatt ihrer eine gleich große Kraft nach paralleler Richtung auf den Schwerpunkt deſſelben

wirkte. Nennt man daher den Winkel, den ihre Richtung mit der Axe IB einschließt, $= \varphi$, so zerfällt sie nach Mo und om, parallel IB und IC, in die beyden Kräfte V Cos φ und V Sin φ, und man hat also (§. 59. 4.)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2gV \operatorname{Cos} \varphi}{M}, \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2gV \operatorname{Sin} \varphi}{M}.$$

§. 301.

Wir wollen setzen, der Körper werde außerdem noch von zwey andern Kräften P und Q getrieben, deren Richtungen, parallel mit IB und IC, durch seinen Schwerpunkt gehen, so haben diese offenbar auf seine Umdrehung keinen Einfluß, weil ihre Momente gegen die Axe IA $= o$ sind. Es bleibt daher, wie vorhin, $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2gVf}{Mh^2}$, und wenn wir zugleich annehmen, daß der Körper schon Anfangs eine Winkelgeschwindigkeit γ um diese nach eben der Seite zu gehabt habe, wohin die Kraft V ihn zu drehen strebt, so wird

$$\gamma = \gamma + \frac{2g}{Mh^2} \int Vf dt.$$

In Ansehung der fortrückenden Bewegung erhält man aber nunmehr:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2g}{M}(P + V \operatorname{Cos} \varphi); \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2g}{M}(Q + V \operatorname{Sin} \varphi).$$

§. 302.

Fig. 41. **Aufgabe.** Um eine cylindrische Rolle tor ist ein Faden gewickelt, und dessen eines Ende irgendwo

Bevor die Rolle auf die andere Seite des Fadens gelangt, nimmt die Beschleunigung ihrer Umdrehung so lange ab, bis to und Ct in eine gerade Linie zu liegen kommen, wo sie dann gänzlich verschwindet. Darauf wird die Umdrehung vom Faden eben so verzögert, als sie zuvor beschleunigt wurde, weil der Halbmesser to nach und nach eben die Lagen gegen ihn annimmt, als vorhin; so daß also, wenn wieder beyde senkrecht auf einander zu stehen kommen, zum zweyten male $\gamma = 2\sqrt{\frac{2ag}{3f^2}}$ wird. Man betrachte nun in der Figur die Seite des Fadens, auf der die Rolle gezeichnet ist, als die entgegengesetzte; so geschieht jetzt ihre Umdrehung nach tvr, und der Faden wird also wieder aufgewickelt. Man hat daher gegenwärtig

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{4gT}{Mf}, \quad \frac{dv}{dt} = -2g + \frac{2gT}{M}, \text{ und wie}$$

vorhin $f.\frac{d\gamma}{dt} = \frac{dv}{dt}$; also $\frac{dv}{dt} = -\frac{4}{3}g$, $v = \sqrt{\frac{1}{3}ag} - \frac{4}{3}gt$, $x = t\sqrt{\frac{1}{3}ag} - \frac{2}{3}gt^2$; mithin für $v = o$, $t = \sqrt{\frac{3a}{2g}}$, $x = a$, d. h. die Rolle steigt auf der andern Seite des Fadens an ihm zu eben der Höhe, von der sie auf der erstern Seite herabgesunken war.

§. 304.

Fig. 38. **Aufgabe.** Eine Kugel vom Halbmesser $= l$ wird in A auf die schiefe Ebene AB gelegt, die gegen die ntale BD unter dem Winkel ABD $= I$ geneigt

man fragt, nach welchem Geſetze ſie ſich vermöge es Gewichtes M längs derſelben herabbewegen werde.

Aufl. 1) Es ſey C der Ort ihres Schwerpunktes eine gegebene Zeit t; O der Punkt, worin ſie als in die Ebene berührt; alſo OC ſenkrecht auf AB, b = f. Man ſetze aber für jetzt allgemein: OC = y, A = x, und für eben den Zeitpunkt die Geſchwindigkeit, womit ſie nach Cc fortrückt, = v; ihre Winkelgeſchwindigkeit um die durch C gehende, auf die Fläche OC ſenkrechte, Axe = ϑ, ihr Moment der Trägheit dieſelbe = Ma². Endlich ſey noch Π der Druck, mit ſie in O auf die Fläche ſenkrecht ausübt, und gegenſeitig nach OC leidet; und R der Widerſtand, den ſie in eben dem Punkte die Friktion nach OA entgegenſetzt.

2) Da der Winkel OCv, den die Normale der Fläche CO mit der Vertikale Cv macht, = I iſt, ſo zerfällt das Gewicht der Kugel M nach CO und der darauf ſenkrechten, oder mit AB parallelen, Richtung Cc in die beyden Theile M Cos I und M Sin I. Es ſind alſo die Kräfte, die auf ihrem Schwerpunkt wirken: nach AO = M Sin I und — R, und nach OC = Π — M Cos I. Außerdem hat die Kraft R gegen die Umdrehungsaxe das Moment Rf; man erhält daher folgende Gleichungen (§. 301.)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2g}{M}(M \text{ Sin } I - R), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2g}{M}(\Pi - M \text{ Cos } I), \text{ und } \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2gRf}{Ma^2}.$$

3) Zunächſt folgt nun aus $y = f$, $\frac{dy}{dt} = 0$, $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, alſo $\Pi = M \operatorname{Cos} I$; oder: die Kugel drückt bey ihrer Bewegung eben ſo ſtark gegen die Fläche, als wenn ſie auf ihr im Gleichgewichte gehalten würde. Ferner wird $v = \frac{dx}{dt}$; mithin $\frac{dv}{dt} = \frac{2g}{M}(M \operatorname{Sin} I - R)$.

4) Die Geſchwindigkeit des Punktes O iſt, vermöge der fortrückenden Bewegung der ganzen Kugel, nach $OB = v$, und, vermöge ihrer Umdrehung, nach $OA = \gamma f$; alſo ſeine eigentliche Geſchwindigkeit nach $OB = v - \gamma f$. Es kann Fälle geben, wo ſie gänzlich verſchwindet, nie aber ſolche, wo ſie negativ würde: denn daß ſie geringer als v iſt, bewirkt allein die Friktion, und dieſe iſt, wie jedes andere Hinderniß, nur fähig, Bewegungen zu verzögern, auch wohl gänzlich zu hemmen, aber nicht, entgegengeſetzte hervorzubringen.

5) Iſt $v - \gamma f = 0$, alſo der jedesmalige Berührungspunkt O in Ruhe, ſo übt die Friktion nicht mehr Widerſtand aus, als erfordert wird, dieſe Ruhe zu unterhalten; iſt dagegen $v > \gamma f$, oder bewegt ſich der Punkt O nach OB wirklich, ſo iſt nun der Widerſtand, den ſie leiſtet, nicht mehr relativ, ſondern unbedingt ein beſtimmter Theil vom Drucke Π, der $= \lambda\Pi$ ſeyn mag. Wir wollen zuerſt prüfen, unter welchen Umſtänden letzterer Fall eintreten kann.

6) Die Annahme $v > \gamma f$ ſetzt voraus, daß

$\frac{dv}{dt} > f\frac{d\gamma}{dt}$, folglich $M \sin I - R > \frac{Rf^2}{a^2}$, oder $M \sin I > R\left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right)$ ſey. Zugleich iſt aber alsdann $R = \lambda\Pi = \lambda M \cos I$, mithin $M \sin I > \lambda M \cos I.\left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right)$, oder $\tan g\, I > \lambda\left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right)$.

7) Für kleinere Neigungswinkel kann alſo v nicht $> \gamma f$ ſeyn. Da nun v nie $< \gamma f$ iſt (4), ſo folgt, daß auf Ebenen, wofür $\tan g\, I < \lambda\left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right)$ iſt, jederzeit $v = \gamma f$, oder die Bewegung der Kugel wälzend ſeyn müſſe.

8) Man erhält demnach für Ebenen dieſer Art:

$$M \sin I - R = \frac{Rf^2}{a^2}; \quad M \sin I = R\left(1 + \frac{f^2}{a^2}\right), \text{ alſo}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2gf \sin I}{a^2 + f^2}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{2gf^2 \sin I}{a^2 + f^2}, \quad v = \frac{2gtf^2 \sin I}{a^2 + f^2},$$

und $x = \frac{gt^2 f \sin I}{a^2 + f^2}$.

9) So lange alſo die Neigung der Fläche klein genug iſt, daß die Kugel von ihr herabrollen kann, kommt die Größe der Friktion dabey gar nicht in Betracht; ſondern die Geſchwindigkeit derſelben verhält ſich dann allezeit zu der, womit ſie von der Fläche herabgleiten würde, wenn beyde vollkommen glatt wären, wie $1 : 1 + \frac{a^2}{f^2}$.

10) Wenn tang $I > \lambda(1 + \frac{f^2}{a^2})$ iſt, ſo kann υ nicht mehr $= \frac{v}{f}$ bleiben, weil ſonſt $R > \lambda M \operatorname{Cos} I$ ſeyn müßte. Daher wird für dieſen Fall $R = \lambda M \operatorname{Cos} I$, und folglich:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = 2g(\operatorname{Sin} I - \lambda \operatorname{Cos} I),\ \upsilon = 2gt(\operatorname{Sin} I - \lambda \operatorname{Cos} I)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2\lambda gf \operatorname{Cos} I}{a^2},\ \gamma = \frac{2\lambda gft \operatorname{Cos} I}{a^2}.$$

§. 305.

Man ſieht leicht, daß ſtatt der Kugel jeder andere runde Körper angenommen werden könne, der durch ſeinen mittlern Querſchnitt in zwey gleiche und ähnliche Hälften getheilt wird.

Für die Kugel iſt (§. 212. 2.) $a^2 = \frac{2}{5} f^2$; alſo, ſo lange ihre Bewegung rollend bleibt, $\upsilon = \frac{10}{7} g t \operatorname{Sin} I$; und wenn man den Neigungswinkel, bey dem ſie zu rollen aufhört, $= \varepsilon$ ſetzt, $\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{7}{2}\lambda$. So wäre z. B. für $\lambda = \frac{1}{3}$, $\varepsilon = 49°24'$. Ferner wird bey größeren Neigungswinkeln

$$\upsilon = 2gt(\operatorname{Sin} I - \lambda \operatorname{Cos} I),\ \gamma = \frac{5\lambda g t \cdot \operatorname{Cos} I}{f}.$$

Die Umdrehung wird dann zwar, wie vorhin, gleichförmig beſchleunigt, ſie richtet ſich aber zugleich nach der Größe der Friktion, und verhält ſich außerdem, wie der Koſinus der Schiefe, und verkehrt, wie der Halbmeſſer der Kugel. Das Fortrücken hingegen bis

t durch die Friktion eben die Verzögerung, wie bey
ndern Körpern, deren Bewegung gleitend iſt.

Beym ſenkrechten Cylinder iſt $a^2 = \frac{1}{2}f^2$, mithin
ng $\varepsilon = 3\lambda$, und für Neigungswinkel, die kleiner
ε ſind, $v = \frac{4}{3}gt.\sin I$. Für ſolche aber, die zwi-
ſchen ε und 90° fallen, $\gamma = \frac{4\lambda gt}{f}$.

Schwingung eines Pendels mit beweglicher Axe.

§. 306.

Bey der im achten Kapitel über den Pendelſchlag
geſtellten Unterſuchung haben wir die Axe, woran
s Pendel aufgehängt wird, und ſeine Schwingungen
richtet, als unbeweglich, und zugleich als eine Linie
genommen, die keine Ausdehnung hat. Beyde Vor-
ſetzungen waren dort nöthig, um nicht gleich An-
ngs die Betrachtung durch Nebenumſtände zu er-
weren: ſie ſind aber keinesweges der Wahrheit voll-
mmen gemäß. Denn einmal muß die Axe, da ſie
s ganze Gewicht des Pendels zu tragen hat, doch im-
r einige Dicke haben, und dann kann ſie auch nie von
en Pfannen rings umher ſo eng eingeſchloſſen wer-
n, daß ſich dadurch die ganze Bewegung auf eine
ße Umdrehung um ihre Mittelpunktslinie einſchrän-
n ließe, indem ſonſt bey der geringſten Ausdehnung
r Axe an ihrem Umfange eine Klemmung entſtehen
irde, die die Umdrehung gänzlich verhinderte. Es

muß alſo nothwendig irgend ein Spielraum zwiſchen ihrem Umfange und der innern Fläche der Unterlage befindlich ſeyn, und dies veranlaßt, daß die Axe ſich nicht beſtändig über einerley Stelle dieſer Unterlage dreht, ſondern bald zur einen, bald zur andern Seite auf ihr fortrollt; welches auf die Bewegung des Pendels wenigſtens ſo vielen Einfluß hat, daß man ihn in Fällen, wo größere Genauigkeit, als gewöhnlich, erfordert wird, nicht außer Acht laſſen darf.

§. 307.

Fig. 42. **Aufgabe.** Es ſey der Durchſchnitt der Unterlage mit der Ebene des Schwunges ein Kreisbogen DAE, der in O ſeinen Mittelpunkt, und OA = b zum Halbmeſſer hat. Das Pendel werde an ſeinem tiefſten Punkte A aufgehängt, und bekomme hierauf eine geringe Bewegung ſeitwärts. Man ſucht die Beſchaffenheit und Dauer ſeiner Schwingungen.

Auflöſ. 1) Anfangs wird alſo ein Schwerpunkt G, ſo wie der Mittelpunkt C ſeiner cylindriſchen Axe in die durch O gehende Vertikale AOG fallen; man nenne die Entfernung beyder Punkte CG = a, den Halbmeſſer der Axe CA = c, und den Zwiſchenraum OC = b — c = e.

2) Nach Verlauf einer Zeit t ſey das Pendel in die Lage cg gekommen, ſo daß jetzt ſein Schwerpunkt in g, der Mittelpunkt der Axe in c, und der Punkt a, wo Axe und Unterlage ſich berühren, in die Linie Oc fällt; ſo hat es ſich während dieſer Zeit nach der linken

Ecke zu um die durch g gehende, auf die Fläche des Schwunges senkrechte, Axe um den Winkel Glg $= \varphi$ dreht, und zugleicht ist der Punkt c durch den Bogen cc' fortgerückt, dem am Mittelpunkte O der Winkel cOc' $= \omega$ zugehört. Daher ist die Winkelgeschwindigkeit des Pendels um jene Axe $\gamma = \frac{d\varphi}{dt}$, und die absolute Geschwindigkeit des Pendels $c = Oc \cdot \frac{d\omega}{dt} = e \cdot \frac{d\omega}{dt}$.

3) Mit dieser Geschwindigkeit dreht sich c, wegen der vollendenden Bewegung der Axe, um den Unterstützungspunkt a, und überhaupt besteht die augenblickliche Bewegung des ganzen Pendels in einer Umdrehung um die durch a gehende Berührungslinie. Da nun seine Winkelgeschwindigkeit um diese Linie eben dieselbe seyn muß, als um die durch g damit parallel gezogene Axe (§. 296.), so hat man $\gamma c = e \cdot \frac{d\omega}{dt}$, oder $cd\varphi = ed\omega$; und weil Anfangs φ und $\omega = o$ sind, so ist auch $c\varphi = e\omega$.

4) Um den Ort g des Schwerpunkts für die gegebene Zeit zu bestimmen, fälle man aus g und c auf OG die Perpendikel gp, cq, und setze als Koordinaten desselben Op $= x$, pg $= y$. Nun ist $cq = Oc \operatorname{Sin} \omega = e \operatorname{Sin} \omega$, $Oq = e \operatorname{Cos} \omega$, $cl = \frac{cq}{\operatorname{Sin} \varphi} = \frac{e \operatorname{Sin} \omega}{\operatorname{Sin} \varphi}$, $ql = cq \operatorname{Cot} \varphi = e \operatorname{Sin} \omega \operatorname{Cot} \varphi$, $lg = a - \frac{e \operatorname{Sin} \omega}{\operatorname{Sin} \varphi}$, $pg = lg \operatorname{Sin} \varphi = a \operatorname{Sin} \varphi - e \operatorname{Sin} \omega$, $pl = lg \operatorname{Cos} \varphi = a \operatorname{Cos} \varphi - e \operatorname{Sin} \omega \operatorname{Cot} \varphi$; also erhält man $x =$

$Oq + ql + pl = e \cos \omega + a \cos \varphi$, und $y =$
$= a \sin \varphi - e \sin \omega$.

5) Diese Gleichungen gelten allgemein für Lage des Pendels bey jeder Abweichung desselben der Vertikale. Wofern aber seine Schwingungen, wir hier annehmen wollen, in so kleinen Bogen ge hen, daß man die Quadrate von φ und ω wegl kann, so ist es gestattet, $\sin \varphi$ und $\sin \omega = \varphi$ u und $\cos \varphi$, $\cos \omega = 1$ zu setzen. Unter dieser Vor setzung wird daher: $x = a + e$, und $y = a\varphi - e$ $(a - c)\varphi$.

6) Die Kräfte, die auf das Pendel wirken, außer seinem Gewichte M, womit es vom Sch punkte g aus nach der Vertikale, oder parallel herabzusinken strebt: der Druck Π, den die Axe der Unterlage nach der Normale ac leidet, und der derstand der Reibung R, wodurch die Axe vom H gleiten nach der Tangente at zurückgehalten wird. wohl die letztern beyden Kräfte nicht auf den Sch punkt gerichtet sind, so weiß man doch aus §. 299, sie eben den Einfluß auf das Fortrücken desselben ben, als wenn sie nach parallelen Richtungen unm bar auf ihn angebracht wären.

7) Man zerlege nun den Druck Π in einen kalen, oder parallel mit pO, $= \Pi \cos \omega = \Pi$, u einen horizontalen, parallel mit $pg = \Pi \sin \omega =$ ferner die Friktion R in einen Theil, parallel mit p $R \sin \omega = R\omega$, und in einen, parallel mit gp $\cos \omega = R$. Diese einzelnen Kräfte unter sich,

mit dem Gewichte M verbunden, geben nach Op die Kraft $M - \Pi - R\omega$, und nach pg die Kraft $\Pi\omega - R$. Es entstehen daher folgende Gleichungen:

$$\frac{d_2x}{dt^2} = \frac{2g}{M}(M - \Pi - R\omega), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2g}{M}(\Pi\omega - R),$$

oder, da $x = a + e$, und $y = (a - c)\varphi$, also $\frac{d^2x}{dt^2} = o$, $\frac{d^2y}{dt} = (a - c)\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ ist:

$M - \Pi - R\omega = o$, woraus $\Pi = M - R\omega$ folgt, und

$$(a - c)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{2g}{M}(M\omega - R) = \frac{2g}{eM}[Mc\varphi - Re].$$

8) Es bleibt jetzt noch übrig, die Umdrehungsmomente der beyden Kräfte Π und R gegen die durch g gehende Axe des Pendels zu finden. Zu dem Ende zerlege man den Druck Π in einen nach $cg = \Pi \operatorname{Cos} acg = \Pi \operatorname{Cos}(\varphi + \omega)$, und in einen darauf senkrechten $= \Pi \operatorname{Sin}(\varphi + \omega) = \Pi(\varphi + \omega)$. Von diesen ist der letztere nur allein wirksam, das Pendel um die erwähnte Axe zu drehen, und hat gegen sie das Moment $a\Pi(\varphi + \omega)$. Ferner setze man, die Tangente at theile, rückwärts verlängert, die Linie cg in die Theile p und q. und ein Perpendikel aus g auf sie gefällt, sey $= w$, so hat man $c : p = w : q$, oder $wp = cq$, und $p + q = a$, also $(w + c)p = ca$. Außerdem ist noch $c = p \operatorname{Cos}(\varphi + \omega) = p$, mithin $w + c = a$, $w = a - c$, und folglich das Moment der Friktion $R = R(a - c)$. Hiervon das erstere, weil es diesem entgegengesetzt ist, abgezogen, bleibt nach der Seite zu, wohin das Pendel

ſich dreht, das Moment $R(a-c) - aH(\varphi+\omega)$ übrig.

9) Wird demnach das Moment der Trägheit des Pendels für eben die Axe $= Mh^2$ geſetzt, ſo bekommt man:

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{2g}{Mh^2}.[R(a-c) - aH(\varphi+\omega)]$$

oder, wenn man für $\frac{d\chi}{dt}$, ω und H ihre Werthe $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, $\frac{c\varphi}{e}$ und $M - R\omega$ ſubſtituirt:

$$h^2.\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{2g}{eM}[Re(a-c) - Ma\varphi(c+e)]$$

10. Dieſe Gleichung mit erſterer (7) verbunden giebt:

$$Mh^2c\varphi - Reh^2 = Re(a-c)^2 - Mab\varphi(a-c)$$

woraus

$$Re = M\varphi.[\frac{h^2c+ab(a-c)}{h^2+(a-c)^2}] \text{ folgt.}$$

11) Hierdurch verwandelt ſich jene Gleichung (7) in folgende:

$$\frac{e}{2g}.\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varphi.[\frac{(a-c)c-ab}{h^2+(a-c)^2}] = -\varphi[\frac{c^2+ae}{h^2+(a-c)^2}].$$

Setzt man nun der Kürze wegen $\frac{2g}{e}.(\frac{c^2+ae}{h^2+(a-c)^2}) = n^2$, multiplicirt beyde Seiten durch $d\varphi$, und integrirt alsdann, ſo wird:

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2}. = C - n^2\varphi^2.$$

12) Die

12) Die Konstante C bestimmt sich aus der Winkelgeschwindigkeit des Pendels, die ihm Anfangs bey einer vertikalen Lage mitgetheilt ist. Nennt man nemlich diese $= \gamma$, so erhält man für $\varphi = o$, $\gamma^2 = C$, mithin $\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \vartheta^2 = \gamma^2 - n^2\varphi^2$.

13) Für $\vartheta = o$, wird $\varphi = \frac{\gamma}{n}$. Dies ist also die größte Abweichung von der Vertikale OG, zu der das Pendel gelangt, oder die halbe Weite seines Schwingungsbogens: denn da $y = (a - c)\varphi(5)$, folglich $\frac{dy}{dt} = (a - c)\frac{d\varphi}{dt} = \vartheta(a - c)$ ist, so hört mit seiner Umdrehung zugleich auch das Fortrücken seines Schwerpunkts auf.

14) Aus (12) bekommt man gegenseitig:

$$ndt = \frac{nd\varphi}{\gamma\sqrt{(1 - \frac{n^2\varphi^2}{\gamma^2})}},$$

$$\text{also: } t = \frac{1}{n} \cdot \text{arc Sin } \frac{n\varphi}{\gamma}.$$

worin $\varphi = \frac{\gamma}{n}$ gesetzt, giebt die halbe Dauer der Schwingung

$$t = \frac{\pi}{2n} = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{e(h^2 + (a - e)^2)}{2g(c^2 + ac)}}.$$

§. 308.

1. Um den Unterschied deutlicher wahrzunehmen,

der durch die Dicke und Bewegu
Schwingungszeit hervorgebracht w
Länge des einfachen Pendels, das
mit dem hier betrachteten in einerle

so wird $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$, mithin $l =$

und wenn man die Distanz AG d
vom Aufhängepunkte A $= f$ setzt,
$c^2 = ef + c\,(c + e) = ef +$
$\frac{e(f^2 + h^2)}{ef + bc}$.

2. Wenn daher c abnimmt,
bey unendlicher Abnahme von c,
$+ \frac{h^2}{f}$; welches eben der Werth ist,
§. 225. unter der Voraussetzung, da
Linie sey, gefunden haben. Die Z
ist demnach für ein Pendel, dessen
Dicke $= 2c$ hat, allemal kleiner, a
re, und zwar in dem Verhältnisse
$\frac{bc}{ef}$).

3. Man sieht daraus ferner,
der Oeffnung, worin die Axe läuft,
Schwingung einen sehr merklichen
$b = c$ wären l und $t = 0$, d. h.
Pendels würde gänzlich gehemmt,
sich klar ist. So wie aber b zunim
der Dicke der Axe zugleich e, fol

h für ein unendliches b, oder für eine ebene Unterla-
erhält man $l = \frac{f^2 + h^2}{f + c}$.

ernere Betrachtung der freyen Bewegung des örpers, wenn die Kräfte, denen er ausgesetzt ist, willkührliche Richtungen haben.

§. 309.

§. 43. **Aufgabe.** Auf einen festen Körper, dessen asse = M ist, wirkt die Kraft V nach einer auf die bene AIB der beyden freyen Axen IA und IB senkrech- n Richtung Ss; man sucht, welche Aenderungen sie ährend des Zeittheils dt in seiner Bewegung hervor- ingt.

Aufl. 1) Es sey S der Punkt, wo ihre Richtung die Ebene AIB eintrift, und aus ihm SP, SQ auf und IB senkrecht; so sind ihre Momente gegen diese beyden Axen = V . SP und V . SQ. Wir wollen sie P und Q, und die Momente der Trägheit des Kör- s für eben die Axen = Ma^2 und Mb^2 setzen.

2) Die beyden Diagonalen SI und PQ des Recht- s IPSQ halbiren einander in ihrem Durchschnitts- nkte O gegenseitig; es würde also an der erstern IS e Kraft = V im Endpunkte I, parallel Ss, und die ppelte Kraft 2V in der Mitte O nach entgegengesetz- Richtung oO angebracht, der gegebenen Kraft V s Gleichgewicht halten. Daher sind eben die Kräfte und 2V nach den umgekehrten Richtungen IC und

Oo ihr äquipollent, und können folglich für sie substituirt werden.

3) Auf gleiche Art läßt sich auch noch die Kraft 2V in die beyden Kräfte V und V auf die Endpunkte Q und P der Diagonale QP nach den paralleten Richtungen Qq und Pq vertheilen; so daß also statt der einen Kraft V nach Ss drey andere Kräfte, jede = V, in den Punkten Q, P und I nach Qq, Pp und IC angebracht werden können, die in Verbindung eben die gegebene Kraft für sich allein auf ihn ausübt. Wir wollen nun den Erfolg von diesen drey Kräften in Reihe nach einzeln durchgehen.

4) Die Richtung Qq der erstern fällt in die Ebene BIC der beyden freyen Axen IB und IC, und ihr Moment gegen die dritte IA ist = V . QI = V . SP = P; daher vermehrt sie während des Zeittheils dt die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um diese Axe um $\frac{2gPdt}{Ma^2}$ (§. 300. 2.), und ertheilt ihm zugleich in Ansehung seines Fortrückens eine Geschwindigkeit nach Qq oder $CI = \frac{2gVdt}{M}$.

5) Eben so liegt die Richtung Pp der zweyten Kraft in der Ebene AIB der beyden freyen Axen IA und IC, und ihr Moment gegen die dritte IB ist = V . R = V . SQ = Q; also bewirkt sie in der Winkelgeschwindigkeit des Körpers um diese Axe eine Aenderung

$\frac{2gQdt}{Mb^2}$, und beſchleunigt zugleich ſein Fortrücken

h Pp oder CI um $\frac{2gVdt}{M}$.

6) Die dritte Kraft hat auf die Umdrehung des rpers, da ihre Richtung durch ſeinen Schwerpunkt eht, keinen Einfluß; ſondern es entſteht bloß durch während des Zeittheils dt nach der entgegengeſetzten chtung IC die Geſchwindigkeit $= \frac{2gVdt}{M}$.

7) Alles dreyes unter ſich verbunden, giebt dem h die geſammte augenblickliche Wirkung der gegebe Kraft; die alſo darin beſteht, daß ſie in den Win eſchwindigkeiten des Körpers um die Axen IA und die Aenderungen $\frac{2gPdt}{Ma^2}$ und $\frac{2gQdt}{Mb^2}$ hervorbringt, zugleich ſeine fortgehende Bewegung nach der Rich g CI, parallel der ihrigen Ss, um $\frac{4gVdt}{M} - \frac{2gVdt}{M}$ $\frac{2gVdt}{M}$ beſchleunigt, d. h.

8) Der Körper wird durch dieſe Kraft auf gleiche t gedreht, als wenn die beyden freyen Axen deſſelben und IB, einzeln genommen, befeſtigt wären, und n Schwerpunkt eben ſo fortgetrieben, als wenn durch n ihre Richtung unmittelbar durchginge.

§. 310.

Man ſetze nun, die Kraft wirke auf den Körper

nach jeder andern willkührlichen Richtung; ſo kann man ſie in drey andere Kräfte zerlegen, deren Richtungen mit den drey freyen Axen deſſelben IA, IB, IC parallel ſind, und nach vorigem §. die Wirkung jeder einzelnen auf ihn beſtimmen. Jede derſelben hat nemlich zwey Momente, und zwar gegen die beyden Hauptaxen, auf deren Ebene ſie ſenkrecht iſt; daher entſpringen aus ihr zwey Winkelgeſchwindigkeiten des Körpers um dieſe Axen, die den beyden Momenten proportional ſind. Es folgt alſo, daß man nur nöthig habe, die Momente gegen einerley Axe, z. B. gegen IA, von je zweyen zuſammen zu nehmen, und daß alsdann die geſammte Aenderung der Winkelgeſchwindigkeit des Körpers um IA dieſer Summe, als einfachem Momente, ebenfalls proportional ſey.

Heißen demnach P, Q, R die vereinigten Momente der erwähnten drey Kräfte gegen die drey Hauptaxen IA, IB und IC, und Ma^2, Mb^2, Mc^2, die Momente der Trägheit des Körpers für eben dieſe Axen, ſo ſind die augenblicklichen Aenderungen ſeiner Winkelgeſchwindigkeiten um dieſelben, die durch jene Kräfte hervorgebracht werden, $= \frac{2gPdt}{Ma^2}$, $\frac{2gQdt}{Mb^2}$ und $\frac{2gRdt}{Mc^2}$.

Außerdem wird aber auch noch die fortrückende Bewegung des Körpers eben ſo geändert, als wenn die gegebene Kraft nach paralleler Richtung unmittelbar auf ſeinen Schwerpunkt wirkte.

§. 311.

Aufgabe. Der Körper drehe sich im gegenwärtigen Augenblicke mit der Winkelgeschwindigkeit $= \omega$ um eine Axe IG, die mit seinen drey Hauptaxen IA, IB, IC die Winkel α, β, γ einschließt; man sucht die Aenderungen, die durch die Schwungkräfte jener einzelnen Elemente während des nächsten Zeittheils dt in seiner Bewegung bewirkt werden.

Aufl. 1) Die Schwungkraft eines solchen Elementes dM, dessen Ort Z von der Axe IG um $Zr = r$ entfernt liegt, ist $= \frac{\omega^2}{2g} . rdM$, und ihre Richtung $rZ\varrho$ auf IG senkrecht. Um sie nach den drey Richtungen Za, Zb, Zc, parallel den drey Hauptaxen des Körpers zerlegen zu können, ziehe man für den Punkt Z drey rechtwinklichten Koordinaten $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$; ferner für r drey andere, mit jenen parallele, $ps = X$, $pq = Y$, $qr = Z$, und überdies aus r und auf YZ und XY die Perpendikel ro und qn; so zerfällt jene Kraft zunächst in eine, parallel $ro = \frac{\omega^2}{2g} . rdM \operatorname{Cos} Zro = \frac{\omega^2}{2g} . ro . dM$, und in eine darauf senkrechte, parallel $IC = \frac{\omega^2}{2g} . Zo . dM$, wovon die letztere noch eine, parallel $AI = \frac{\omega^2}{2g} . dM . ro \operatorname{Cos} Yqn = \frac{\omega^2}{2g} . qndM$, und in eine darauf senkrechte, oder parallel $IB = \frac{\omega^2}{2g} . YndM$ giebt.

2) Da nun $qn = X - x$, $Yn = y - Y$, $Zo = z - Z$, ſo ſind die Kräfte, die aus der Schwungkraft des Elementes dM entſpringen, folgende:

nach Za, parallel IA, die Kraft $= \frac{\gamma^2}{2g}(x-X)dM$

nach Zb . . IB . . . . $= \frac{\gamma^2}{2g}(y-Y)dM$

nach Zc . . IC . . . . $= \frac{\gamma^2}{2g}(z-Z)dM$.

3) Das Moment der erſtern gegen die Axe B, nach der Seite CA zu, iſt $= \frac{\gamma^2}{2g}(x - X)\,zdM$, und gegen IC nach BA $= \frac{\gamma^2}{2g}(x - X)\,ydM$.

Das Moment der zweyten gegen IA nach CB $= \frac{\gamma^2}{2g}(y - Y)\,zdM$, und gegen IC nach AB $= \frac{\gamma^2}{2g}(y - Y)\,xdM$.

Das Moment der dritten gegen IA nach BC $= \frac{\gamma^2}{2g}(z - Z)\,ydM$, und gegen IB nach AC $= \frac{\gamma^2}{2g}(z - Z)\,xdM$.

4) Wenn man nun von dieſen Momenten jedes Paar, das ſich auf einerley Axe bezieht, verbindet, und für alle Elemente des Körpers ſummirt, ſo wird das geſammte Momene:

P aller Schwungkräfte gegen IA nach BC zu $= \frac{\vartheta^2}{2g} \int (zY - yZ)\, dM$

Q . . . . . IB nach CA zu $= \frac{\vartheta^2}{2g} \int (xZ - zX)\, dM$

R . . . . . IC nach AB zu $= \frac{\vartheta^2}{2g} \int (yX - xY)\, dM.$

5) Um die Werthe der Koordinaten X, Y, Z zu timmen, nenne man vorläufig IM = w, und die nkel qIA, rIq, wie oben (§. 281.) = η und ϑ;)at man Iq = w Cos ϑ, und qr = w Sin ϑ; fer= pq = Iq Sin η = w Cos ϑ Sin η, Ip = Iq Cos η w Cos ϑ Cos η; folglich X = w Cos ϑ Cos η = w s α, Y = w Cos ϑ Sin η = w Cos β, und Z = Sin ϑ = w Cos γ (§. 287. 2.). Zugleich iſt aber endoſ.) w = x Cos α + y Cos β + z Cos γ;) wird:

X = x Cos α^2 + y Cos α Cos β + z Cos α Cos γ
Y = x Cos α Cos β + y Cos β^2 + z Cos β Cos γ
Z = x Cos α Cos γ + y Cos β Cos γ + z Cos γ^2.

6) Dies für X, Y und Z in (4) ſubſtituirt,), dem Erforderniſſe der freyen Axen gemäß, $\int xydM$, dM und $\int yzdM = 0$ geſetzt, giebt:

$2gP = \vartheta^2$ Cos β Cos $\gamma \int (z^2 - y^2)\, dM$
$2gQ = \vartheta^2$ Cos α Cos $\gamma \int (x^2 - z^2)\, dM$
$2gR = \vartheta^2$ Cos α Cos $\beta \int (y^2 - x^2)\, dM.$

7) Heißen nun, wie vorhin, die Momente der

Trägheit des Körpers in Beziehung auf die drey Hauptaxen $= Ma^2$, Mb^2 und Mc^2, so ist (§. 287. 4) $\int(z^2 - y^2)\,dM = C - B = (b^2 - c^2)\,M$, $\int(x^2 - z^2)\,dM = A - C = (c^2 - a^2)\,dM$, und $\int(y^2 - x^2)\,dM = B - A = (a^2 - b^2)\,M$, also:

$$2gP = \gamma^2 (b^2 - c^2)\, M \cos\beta \cos\gamma$$
$$2gQ = \gamma^2 (c^2 - a^2)\, M \cos\alpha \cos\gamma .$$
$$2gR = \gamma^2 (a^2 - b^2)\, M \cos\alpha \cos\beta,$$

woraus innerhalb des Zeittheils dt um diese drey Axen die Winkelgeschwindigkeiten $\frac{2gPdt}{Ma^2}$, $\frac{2gQdt}{Mb^2}$ und $\frac{2gRdt}{Mc^2}$ entspringen.

8 Damit man erfahre, ob die Schwungkräfte auch Aenderungen in der fortrückenden Bewegung des Körpers veranlassen, müssen noch die drey Kräfte (12) für alle Elemente desselben einzeln summirt werden. Die Summe der erstern ist $= \frac{\gamma^2}{2g}\int(x - X)\,dM$, und wenn man darin für X seinen Werth aus (5) setzt, wird darin das Integral $= \sin\alpha^2 \int x dM - \cos\alpha \cos\beta \int y dM - \cos\alpha \cos\gamma \int z dM = o$, weil $\int x dM$, $\int y dM$, $\int z dM = o$ sind. Eben so findet man, daß auch die Summen der andern beyden Kräfte für sich verschwinden. Es folgt also, daß die Schwungkräfte auf das Fortrücken des Körpers gar keinen Einfluß haben.

§. 312.

Es mögen nun außerdem noch so viele Kräfte auf den Körper wirken, als man will, so kommen doch nur

in Hinsicht auf seine Umdrehung von jeder einzelnen Kraft die drey Momente gegen die drey Hauptaxen desselben in Betracht, und man findet solche nach §. 310., wenn man die Kraft in drey andere, parallel jenen Axen, zerlegt. Diese Momente kann man alsdann für jede Axe besonders von allen Kräften zusammennehmen, wodurch man also zuletzt drey einfache Momente P, Q, R erhält, denen die gesammte augenblickliche Wirkung aller Kräfte proportional ist. Es sind nemlich die Winkelgeschwindigkeiten, die sie mit Inbegriff der Schwungkräfte den Körper während des Zeittheils dt um seine drey Hauptaxen ertheilen, folgende:

um die Axe IA $= \frac{2gPdt}{Ma^2} + \frac{(b^2-c^2)}{a^2} \cdot \omega^2 \cos\beta \cos\gamma \, dt$

. . . IB $= \frac{2gQdt}{Mb^2} + \frac{(c^2-a^2)}{b^2} \cdot \omega^2 \cos\alpha \cos\gamma \, dt$

. . . IC $= \frac{2gRdt}{Mc^2} + \frac{(a^2-b^2)}{c^2} \cdot \omega^2 \cos\alpha \cos\beta \, dt.$

§. 313.

Aufgabe. Aus den gegebenen Momenten P, Q, R die augenblicklichen Aenderungen zu finden, die sowohl die Winkelgeschwindigkeit ω des Körpers, wie auch die Lage seiner Umdrehungsaxe IG gegen IA, IB und IC leidet.

Aufl. 1) Die Winkelgeschwindigkeit ω, womit der Körper im gegenwärtigen Augenblicke sich um die Axe IG drehet, zerfällt in drey andere um die drey Hauptaxen, $= \omega \cos \alpha$, $\omega \cos \beta$ und $\omega \cos \gamma$

(§. 291.), und die Aenderungen derſelben im nächſten dt ſind:

$$d(\aleph \operatorname{Cos}\alpha) = d\aleph \operatorname{Cos}\alpha - \aleph \operatorname{Sin}\alpha d\alpha$$
$$d(\aleph \operatorname{Cos}\beta) = d\aleph \operatorname{Cos}\beta - \aleph \operatorname{Sin}\beta d\beta$$
$$d(\aleph \operatorname{Cos}\gamma) = d\aleph \operatorname{Cos}\gamma - \aleph \operatorname{Sin}\gamma d\gamma.$$

2) Dieſe entſtehen nun theils durch die von außen auf den Körper wirkenden Kräfte, deren Momente P, Q, R gegen ſeine Hauptaxen gegeben ſind, theils aber auch durch die Schwungkräfte ſeiner einzelnen Elemente; daher müſſen ſie den im vorigen § gefundenen Winkelgeſchwindigkeiten gleich ſeyn. Man erhält alſo:

$$d\aleph \operatorname{Cos}\alpha - \aleph \operatorname{Sin}\alpha d\alpha = \frac{2gPdt}{Ma^2} + \frac{b^2-c^2}{a^2} \cdot \aleph^2 \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\gamma dt$$

$$d\aleph \operatorname{Cos}\beta - \aleph \operatorname{Sin}\beta d\beta = \frac{2gQdt}{Mb^2} + \frac{c^2-a^2}{b^2} \cdot \aleph^2 \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\gamma dt$$

$$d\aleph \operatorname{Cos}\gamma - \aleph \operatorname{Sin}\gamma d\gamma = \frac{2gRdt}{Mc^2} + \frac{a^2-b^2}{c^2} \cdot \aleph^2 \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta dt.$$

3) Man multiplicire dieſe drey Gleichungen der Reihe nach durch Cos α, Cos β, Cos γ, und addire ſie dann zuſammen; ſo wird das erſte Glied der linken Seite $= d\aleph (\operatorname{Cos}\alpha^2 + \operatorname{Cos}\beta^2 + \operatorname{Cos}\gamma^2) = d\aleph$; das zweyte $= \aleph d(\operatorname{Cos}\alpha^2 + \operatorname{Cos}\beta^2 + \operatorname{Cos}\gamma^2) = 0$, und der Zähler des vordern Faktors vom letzten Gliede auf der rechten Seite: $b^4c^2 - c^4b^2 + c^4a^2 - a^4c^2 + a^4b^2 - b^4a^2 = (c^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-a^2)$, folglich:

$$d\omega = \frac{(c^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-a^2)}{a^2b^2c^2} \cdot \omega^2 dt \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\gamma + \frac{2gdt}{M}\left(\frac{P\operatorname{Cos}\alpha}{a^2} + \frac{Q\operatorname{Cos}\beta}{b^2} + \frac{R\operatorname{Cos}\gamma}{c^2}\right)$$

worin außer $d\omega$ kein anderes Differenzial, als das der Zeit, vorkommt.

4) Um auch die Differenziale der Winkel α, β und γ abgesondert zu erhalten, substituire man den für $d\omega$ gefundenen Werth in den erstern drey Gleichungen, so bekommt man:

$$\omega \operatorname{Sin}\alpha d\alpha = \frac{c^2-b^2}{a^2} \cdot \omega^2 dt \operatorname{Cos}\beta \operatorname{Cos}\gamma \left(1 + \frac{(a^2-c^2)(b^2-a^2)}{b^2c^2} \operatorname{Cos}\alpha^2\right) + \frac{2gdt}{M}\left(\frac{Q\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\beta}{b^2} + \frac{R\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\gamma}{c^2} - \frac{P\operatorname{Sin}\alpha^2}{a^2}\right)$$

$$\omega \operatorname{Sin}\beta d\beta = \frac{a^2-b^2}{c^2} \cdot \omega^2 dt \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\gamma \left(1 + \frac{(b^2-a^2)(c^2-b^2)}{a^2c^2} \operatorname{Cos}\beta^2\right) + \frac{2gdt}{M}\left(\frac{R\operatorname{Cos}\beta\operatorname{Cos}\gamma}{c^2} + \frac{P\operatorname{Cos}\quad\operatorname{Cos}\beta}{a^2} - \frac{Q\operatorname{Sin}\beta^2}{b^2}\right)$$

$$\omega \operatorname{Sin}\gamma d\gamma = \frac{b^2-a^2}{c^2} \cdot \omega^2 dt \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta \left(1 + \frac{(c^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^2b^2} \operatorname{Cos}\gamma^2\right) + \frac{2gdt}{M}\left(\frac{P\operatorname{Cos}\alpha\operatorname{Cos}\gamma}{a^2} + \frac{Q\operatorname{Cos}\beta\operatorname{Cos}\gamma}{b^2} - \frac{R\operatorname{Sin}\gamma^2}{c^2}\right).$$ *)

§. 314.

Ließen sich diese vier Gleichungen unmittelbar integriren, so bekäme man dadurch ω, α, β und γ, durch t ausgedrückt, d. h. man wüßte für jeden Zeitpunkt der Bewegung die Lage der Umdrehungsaxe gegen die drey Hauptaxen, und die Winkelgeschwindigkeit, womit sich

*) Eben diese Gleichungen findet Euler auf einem Wege, der von dem meinigen ganz verschieden ist. M. s. d. Theor. motus corp. solid. Cap. XV. pag. 346.

der Körper um dieſelbe drehete; allein da die veränderlichen Größen ϑ, α, β, γ ſelbſt in ihnen vorkommen, ſo ſind ſie zu dieſem Zwecke nicht brauchbar. Man nehme ſtatt deren wieder die erſtern drey Gleichungen (2), und ſetze darin die Winkelgeſchwindigkeiten des Körpers um ſeine Hauptaxen: $\vartheta \operatorname{Cos} n = x$, $\vartheta \operatorname{Cos} \beta = y$, $\vartheta \operatorname{Cos} \gamma = z$, ſo verwandeln ſie ſich in folgende:

$$dx + \frac{(c^2 - b^2)}{a^2} \cdot yzdt = \frac{2gPdt}{Ma^2}$$

$$dy + \frac{(a^2 - c^2)}{b^2} \cdot xzdt = \frac{2gQdt}{Mb^2}$$

$$dz + \frac{(b^2 - a^2)}{c^2} \cdot xydt = \frac{2gRdt}{Mc^2}$$

Wo fern nun nicht etwa die Momente P, Q, R noch von den Winkeln α, β, γ abhängen, enthalten dieſe Gleichungen außer t bloß x, y und z als veränderliche Größen, und man kann ſie leicht ſo mit einander verbinden, daß jede dieſer Größen einzeln durch t ausgedrückt wird.

§. 315.

Wir wollen den Fall näher betrachten, wo der Körper keinen andern, als ſolchen Kräften ausgeſetzt iſt, deren Richtungen durch ſeinen Schwerpunkt gehen. Alsdann ſind folglich P, Q und R = o, und man erhält zunächſt aus den erſtern beyden Gleichungen:

$$\frac{(a^2 - c^2)}{b^2} \cdot xdx - \frac{(c^2 - b^2)}{a^2} \cdot ydy = o;$$

ovon das Integral

$$\frac{(a^2-c^2)}{b^2}\cdot x^2 - \frac{(c^2-b^2)}{a^2}\cdot y^2 = \text{const ist.}$$

erner aus der erſtern und dritten

$$\frac{(b^2-a^2)}{c^2}\cdot x\,dx - \frac{(c^2-b^2)}{a^2}\cdot z\,dz = 0,$$

oder $\frac{(b^2-a^2)}{c^2}x^2 - \frac{(c^2-b^2)}{a^2}z^2 = \text{Const.}$

Man ſetze nun, es ſey zu Anfange der Bewegung $= e$, $y = f$, $z = h$ geweſen, und nenne außerdem r Abkürzung:

$$\frac{a^2}{c^2-b^2} = A,\quad \frac{b^2}{a^2-c^2} = B,\quad \frac{c^2}{b^2-a^2} = C;$$

wird:

$$Ax^2 - By^2 = Ae^2 - Bf^2$$

$$Ax^2 - Bz^2 = Ae^2 - Ch^2, \text{ mithin}$$

$\sqrt{B} = \sqrt{(Ax^2 - Ae^2 + Bf^2)}$, und $z\sqrt{C} = \sqrt{Ax^2 - Ae^2 + Ch^2}$.

Dieſe Werthe für y und z in die erſte Gleichung: $dx + yz\,dt = 0$ ſubſtituirt, geben:

$$dt = \frac{-A\,dx\sqrt{BC}}{\sqrt{(Ax^2-Ae^2+Bf^2)\,(Ax^2-Ae^2+Ch^2)}}$$

oraus durch Integration gefunden wird, wie t von x, der gegenſeitig x, y und z von t abhängt.

Hieraus ergiebt ſich dann ferner $\gamma = \sqrt{(x^2 - y^2 + z^2)}$, und $\cos\alpha = \frac{x}{\gamma}$, $\cos\beta = \frac{y}{\gamma}$, $\cos\gamma = \frac{z}{\gamma}$.

§. 316.

Nachdem man auf ſolche Weiſe die drey Winkelgeſchwindigkeiten x, y und z durch die Zeit t beſtimmt hat, bleibt endlich noch übrig, auch die abſolute Lage des ganzen Körpers, oder die Abweichungen ſeiner Hauptaxen von dreyen unveränderlichen Richtungslinien für eben die Zeit t anzugeben. Am deutlichſten laſſen ſich dieſe Abweichungen als Bogen auf der Oberfläche einer Kugel darſtellen, die im Schwerpunkte des Körpers ihren Mittelpunkt hat, und mit demſelben zugleich fortrückt, oder dabey keine Umdrehung leidet, ſo daß ihre Halbmeſſer und größten Kreiſe ſich ſtets parallel bleiben, folglich im abſoluten Raume beſtändig einerley Lage behalten.

Fig. 45. 1) Es ſey AB der Bogen eines ſolchen größten Kreiſes; A ein beſtimmter Punkt in demſelben. Man ziehe aus den Punkten M, N und O, worin die Hauptaxen des Körpers bey ihrer gegenwärtigen Lage die Oberfläche der Kugel treffen, die Bogen MA, NA, OA, und ſetze dieſe = l, m, n. Ueberdies ſey noch der Winkel MAB = λ, NAB = μ, OAB = ν.

2) Im nächſten dt beſchreibt nun der Körper um die letztern beyden Axen, und mit ihm der Punkt M um N und O, die kleinen Bogenſtücke Mo = ydt, Mn = zdt, welches ſowohl in ſeiner Entfernung von A = l, wie auch im Winkel MAB = λ, die augenblicklichen Aenderungen dl und dλ hervorbringt.

3) Um dieſe zu beſtimmen, ziehe man Mp und

auf AM senkrecht; so ist oMp = nMq = AMN,
im Dreiecke AMN

$\cos AMN = \frac{\cos AN - \cos AM \cos MN}{\sin AM \sin MN} = \frac{\cos m}{\sin l}$;

er $\sin AMN = \sqrt{(1 - \frac{\cos m^2}{\sin l^2})} = \frac{1}{\sin l}\sqrt{}$

$-(\cos l^2 + \cos m^2)] = \frac{\cos n}{\sin l}$, weil $\cos l^2$
$\cos m^2 + \cos n^2 = 1$ ist; mithin

$dl = Mq - op = Mn \cos nMq - Mo \sin oMp = \frac{dt}{\sin l}(z \cos m - y \cos n)$

oder $dl \sin l = dt(z \cos m - y \cos n)$

$d\lambda \sin l = -(Mp + nq) = -Mo \cos oMp - Mn \sin nMq = -\frac{dt}{\sin l}(y \cos m + z \cos n)$,

r:

$d\lambda \sin l^2 = -dt(y \cos m + z \cos n)$.

4) Auf gleiche Art wird in Rücksicht der andern den Axen:

$dm \sin m = dt(x \cos n - z \cos l)$; $dn \sin n = dt(y \cos l - x \cos m)$; $d\mu \sin m^2 = dt(z \cos n + x \cos l)$; $d\nu \sin n^2 = -dt(x \cos l + y \cos m)$.

5) Man kann diese Formeln noch dadurch vereinfachen, daß man $\cos l = p$, $\cos m = q$, $\cos n = r$ setzt; dies giebt nemlich $dp = dt(zq - yr)$, $dq = dt(xr - zp)$, $dr = dt(yp - xq)$, und $dp(1 - p^2) + dt(yq + zr) = 0$, $d\mu(1 - q^2)$

geſchehen kann. Iſt der Körper überdies elaſtiſch, [illegible] wird auch noch Kraft erfordert, ihn in dem gekrümmten Zuſtande, worin er bereits verſetzt iſt, ferner zu [illegible] halten; oder, die Elaſticität hält alsdann der biegenden Kraft das Gleichgewicht. Es iſt im neunten Kapitel der Statik bey Beſtimmung der reſpektiven Feſtigkeit elaſtiſcher Körper gezeigt worden, daß bey gleicher Dicke des Körpers das Moment dieſer Kraft gegen irgend eine Stelle deſſelben ſich verkehrt, wie der Halbmeſſer der Krümmung verhalte, die der Körper an dieſer Stelle bekommen hat; heißt alſo r der Krümmungshalbmeſſer für ein Element bey Y der elaſtiſchen Kurve AYD, ſo läßt ſich das Moment der Elaſticität dieſes Elementes allgemein durch $\frac{E}{r}$ ausdrücken, wo E eine beſtändige Größe bedeutet, die für jede beſondere Materie und Form des Körpers durch Verſuche gefunden werden muß.

§. 319.

Aufgabe. Auf jedes Element $=$ ds eines elaſtiſchen Körpers, der allenthalben gleiche Dicke hat, wirkt eine Kraft $=$ pds, parallel mit AX, und eine andere, darauf ſenkrechte, oder nach XY, $=$ qds; außerdem ſind noch an ſeinem Endpunkte A zwey Kräfte F und G nach entgegengeſetzten Richtungen Aa und Aα angebracht; man ſucht die Kurve AYD, worin der Körper durch dieſe Kräfte, nachdem ſie ſich mit ſeiner Elaſticität ins gleichgewicht geſetzt haben, gebogen ſeyn wird.

46. Aufl. 1) Man nehme die Richtung AB der mentarkräfte pds zur Abſciſſenlinie der Kurve AYD , und ſetze als Koordinaten des Punktes Y, AX = XY = y. Für einen andern beliebigen Punkt y er Kurve ſey Ax = x', xy = y', und von den den Kräften, die auf das daſelbſt befindliche Ele nt ds wirken, ſey die nach yo = p'ds, die nach yr q'ds.

2) Die erſtere ſtrebt den Bogen yY um den nkt Y nach innen zu drehen, oder den Körper an Stelle Y ferner zu krümmen, und hat gegen dieſen nkt das Moment:

$$Yo \,.\, p'ds = (y - y') p'ds.$$

3) Die Summe der Momente dieſer einzelnen äfte p'ds gegen Y iſt daher $= \int (y - y') p'ds$, r weil hierbey y als unveränderlich betrachtet wer- muß, $= y\int p'ds - \int y' p'ds$.

4) Setzt man nun hierin $y' = y$, ſo wird auch $= p$, folglich das geſammte Moment aller nach AB ichteten Kräfte, die auf den Bogen AY wirken, um am Punkte Y zu drehen, $= y\int pds - \int ypds$.

5) Man nenne die Summe dieſer Kräfte $\int pds$ P, ſo erhält man $pds = dP$. Hierdurch wird alſo gefundene Moment $= yP - \int ydP = \int Pdy$; r, wenn man darin den Werth für P wieder her- lt, $= \int dy \int pds$.

6) Die andere Kraft q'ds hat dagegen das Be- ben, den Bogen yY um den Punkt Y auswärts zu hen, und ihr Moment gegen denſelben iſt:

$xY \cdot q'ds = xXq'ds = (x - x')q'ds$

Hiervon die Summe genommen, und darin x' gesetzt, giebt das sämmtliche Moment aller dieser Kräfte, so viel deren auf den Bogen AY wirken, den Punkt Y nach außen zu drehen, $= x\int qds - \int$ welches sich auf gleiche Art, wie (5) gezeigt $\int dx \int qds$ verwandelt.

7) Letzteres Moment vom ersten (5), da entgegengesetzt ist, abgezogen, bleibt:

$$\int dy \int pds - \int dx \int qds$$

für das Moment der Kräfte beyder Art gegen den gemeinschaftlichen Punkt Y.

8) Hiermit vereinigen sich endlich noch die Momente Fy und Gx der Kräfte F und G gegen den Punkt Y, die aber gleichfalls einander entgegengesetzt sind, weil F und G den Bogen AY nach verschiedenen Seiten um Y zu drehen streben. Nach Abzug der ersten bleibt also von beyden noch $Gx - Fy$ übrig, und dieses vorhin erhaltenen Momente addirt, giebt:

$$Gx - Fy + \int dy \int pds - \int dx \int qds.$$

9) Soll nun am Punkte Y keine fernere Bewegung erfolgen, so muß die Elasticität des Elementes an dieser Stelle allen den Kräften, die auf den Bogen wirken, das Gleichgewicht halten, folglich ihr Moment $\frac{E}{r}$ (§. 318.) den Momenten dieser Kräfte zusammen genommen gleich seyn. Man bekommt daher die Gleichung:

$$Gx - Fy + \int dy \int p ds - \int dx \int q ds = E\left(\frac{dyd^2x - dxd^2y}{ds^3}\right),$$

durch die Geſtalt der Kurve verlangtermaßen be-
mmt wird.

§. 320.

Bey der eben gefundenen Gleichung liegt, wie
n ſieht, die Vorausſetzung zum Grunde, daß die
ſtiſche Ruthe in ihrem natürlichen Zuſtande gerade
; indeß läßt ſie ſich doch auch leicht auf den allge-
inern Fall ausdehnen, wenn die Ruthe vor der Bie-
ng jede willkührlich gekrümmte Form hat. Es ent-
ht nemlich dadurch weiter keine Aenderung als in
n Momente der Elaſticität, das nun offenbar nicht
hr für irgend eine Stelle Y der ganzen Krüm-
ng, die nach der Biegung daſelbſt erfolgt, propor-
nal bleiben kann.

47. Man ſetze den Krümmungshalbmeſſer für den
bpunkt Y des Bogens AY = s bey der anfänglichen
ſtalt der Ruthe = R, bey der nachmaligen, die ſie
ch die Biegung annimmt, = r; ſo iſt die natürliche
nge des Streifen $p\pi p'\pi'$, der in der Höhe Yp = u
er Y liegt, und mit dem Elemente Yy = ds einerley
nplitude YOy hat, $= ds\left(1 + \frac{u}{R}\right)$, und die Länge
n dieſes Streifen im letztern Falle $= ds\left(1 + \frac{u}{r}\right)$;
o ſeine Ausdehnung $\varepsilon ds - uds\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$.

Nennt man nun ferner den Querschnitt dieses Streifen = ds, so läßt sich seine zusammenziehende Kraft, die sowohl dem Koefficienten der Ausdehnung als auch der Fläche dS proportional ist, durch Ku $\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$ ausdrücken. Ihr Moment gegen den Punkt Y ist sodann $= Ku^2 dS \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$, und das Integral davon, oder das sämmtliche Moment der Elasticität der Stelle $Y = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) K \int u^2 dS$.

Für den besondern Fall, wo die Ruthe Anfangs gerade ist, wird $\frac{1}{R} = o$, also $K \int u^2 dS = E$, und daher überhaupt das Moment der Elasticität $= E \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$. Dies für $\frac{E}{r}$ in die Gleichung (§. 319.9.) gesetzt, giebt allgemein:

$$Gx - Fy + \int dy \int pds - \int dx \int qds = E \left(\frac{dyd^2x - dxd^2y}{ds^3}\right) - \frac{E}{R},$$

wo R aus der anfänglichen Gestalt der Ruthe gegeben ist.

§. 321.

Für den bloß biegsamen Faden ist $E = o$, mithin:

$$\int dy \int pds - \int dx \int qds = Fy - Gx.$$

Um auch zugleich seine Spannung T an irgend einer Stelle Y zu bestimmen, nenne man den Winkel, den

Tangente an Y mit der Ordinate XY macht, $= \varphi$;
geben die beyden Kräfte pds und qds, nach den
chtungen der Tangente und Normale zerlegt, zuſam-
en eine Tangentialkraft nach der Axe AB zu $= -$
ls Sin φ — qds Cos φ, und eine Normalkraft nach
ßen zu $= -$ pds Cos φ + qds Sin φ. Daher
ird (Statik §. 169.):

$$dT = -\text{pds Sin } \varphi - \text{qds Cos } \varphi$$

$$Td\varphi = -\text{pds Cos } \varphi + \text{qds Sin } \varphi.$$

an multiplicire erſtere Gleichung durch Sin φ, letz-
e durch Cos φ, und addire alsdann beyde, ſo er-
lt man:

$$dT \text{ Sin } \varphi + T \text{ Cos } \varphi d\varphi = -\text{pds},$$

von das Integral T Sin φ = Conſt — $\int$pds iſt.

Für den Anfangspunkt A ſey nun T = H,
$= \alpha$; alſo, da das Integral $\int$pds für dieſen Punkt
:ſchwindet:

$$H \text{ Sin } \alpha = \text{Conſt}.$$

ie Spannung H wird bloß durch die Kräfte F und G
rvorgebracht, und entſpringt folglich aus der Zuſam-
:nſetzung beyder. Daher hat man H Sin α = F,
Cos α = G, mithin Conſt = F, und

$$T \text{ Sin } \varphi = F - \int \text{pds}.$$

an multiplicire ferner die erſtere obiger Gleichungen
rch Cos φ, die letztere durch Sin φ, und ſubtrahire
nn beyde von einander, ſo bleibt:

$$dT \text{ Cos } \varphi - T \text{ Sin } \varphi d\varphi = -\text{qds},$$

›raus durch Integration:

$$T \text{ Cos } \varphi = G - \int \text{qdt folgt.}$$

Beyde Werthe T Sin φ und T Cos φ mit einander verbunden, geben sodann:

$$T = F \operatorname{Sin}\varphi + G \operatorname{Cos}\varphi - \operatorname{Sin}\varphi \int p\,ds - \operatorname{Cos}\varphi \int q\,ds$$

$$= F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} - \frac{dx}{ds}\int p\,ds - \frac{dy}{ds}\int q\,ds.$$

§. 322.

Wenn man noch die beyden zuletzt erhaltenen Integral-Gleichungen durch Cos φ und Sin φ multiplicirt, so erhält man aus der erstern

$$T \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi = F \operatorname{Cos}\varphi - \operatorname{Cos}\varphi \int p\,ds,$$

und aus der letztern:

$$T \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi = G \operatorname{Sin}\varphi - \operatorname{Sin}\varphi \int q\,ds, \text{ mithin}$$

$$F \operatorname{Cos}\varphi - \operatorname{Cos}\varphi \int p\,ds = G \operatorname{Sin}\varphi - \operatorname{Sin}\varphi \int q\,ds, \text{ oder}$$

$$F\,dy - G\,dx = dy \int p\,ds - dx \int q\,ds,$$

woraus durch Integrirung eben die Gleichung für die Gestalt des Fadens entsteht, die wir (§. 321.) aus der allgemeinern Formel abgeleitet haben. Es zeigt sich also hier zwischen beyden Methoden eine vollkommene Uebereinstimmung, von denen doch die letztere, da sie sich bloß auf die Theorie der Spannungen gründet, mit erstrer nichts gemein hat.

§. 323.

Fig. 48. **Aufgabe.** Wofern die im §. 319. angenommenen Kräfte mit der Elasticität des Körpers nicht ins Gleichgewicht treten können, so daß der Körper durch sie wirklich in Bewegung gesetzt wird, alsdann für jede verflossene Zeit t sowohl die Gestalt desselben AYD,

die auch die Geschwindigkeit jedes seiner einzelnen Elemente anzugeben.

Aufl. 1) Es sey Y der Ort, wohin das am Endpuncte des Bogens AY = s befindliche Elemente Yy = ds, dessen Masse m heißen mag, nach Verlauf der Zeit t gelangt ist; man setze als Coordinaten desselben, von einem bestimmten Puncte O der unbeweglichen Linie OB angerechnet, OX = x, XY = y; so sind x und y veränderliche Größen, die theils vom Bogen s, theils von der Zeit t abhängen. Von s nemlich, insofern für einen bestimmten Zeitpunct jedem einzelnen Elemente zwey besondere Coordinaten zugehören; und von t deshalb, weil der Endpunct eines bestimmten Bogens in jedem folgenden Zeittheile an einem andern Orte sich befindet.

2) Da also für einerley Bogenlänge s das Wachsthum der Größen x und y bloß vom Wachsthum der Zeit herrührt, so sind die Geschwindigkeiten des gedachten Elementes nach den beyden Richtungen Yo und Yr die partiellen Differenzialquotienten von x und y nach t genommen, oder $= \left(\frac{dx}{dt}\right)$ und $\left(\frac{dy}{dt}\right)$. Wir wollen sie v und u nennen.

3) Ihre Aenderungen dv und du im nächsten Zeittheile dt setzen voraus, daß das Element m nach obigen Richtungen durch zwey Kräfte $= \frac{m}{2g}\left(\frac{dv}{dt}\right)$ und $\frac{m}{2g}\left(\frac{du}{dt}\right)$ beschleunigt werde. Es sey die Masse des

ganzen Körpers = K, seine Länge AD = a, so ist wegen der gleichen Dicke deſſelben, $m = \frac{Kds}{a}$, und folglich:

$$\frac{m}{2g}\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{Kds}{2ag}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right); \quad \frac{m}{2g}\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{Kds}{2ag}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

4) Wofern alſo dieſe beyden Kräfte auf jedes einzelne Element nach den Richtungen Yo und Yr wirkten, würde die Bewegung des ganzen Körpers eben ſo erfolgen, wie ſie durch die in der Aufgabe gegebenen Kräfte wirklich hervorgebracht wird. Alſo müſſen ſolche den gegebenen Kräften in einerley Zeitpunkte der Bewegung äquipollent ſeyn, und folglich nach umgekehrter Richtung ihnen das Gleichgewicht halten.

5) Es muß daher der ganze Körper im Gleichgewichte ſeyn, wenn an ſeinem Endpunkte A nach den Richtungen Aa und Aα die Kräfte F und G ziehen, und äußerdem jedes ſeiner Elemente den beyden Kräften $pds - \frac{Kds}{2ag}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$ nach Yo, und $qds - \frac{Kds}{2ag}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$ nach Yr ausgeſetzt iſt.

6) Setzt man demnach $p - \frac{K}{2ag}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = p'$ $q - \frac{K}{2ag}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = q'$, und überdies den Krümmungshalbmeſſer für den Endpunkt des Bogens AY bey der anfänglichen Geſtalt des Körpers = R, ſo bekommt man folgende Gleichung:

$$Gx - Fy + \int dy \int p' ds - \int dx \int q' ds = E \left(\frac{dyd^2x - dxd^2y}{ds^3}\right) - \frac{E}{R};$$

raus ſich alles herleiten läßt, was von der Bewegung
Körpers zu wiſſen verlangt wird.

Von der Schwingung der Saiten.

§. 324.

49. Eine gleichdicke Saite AB, die an ihren End-
nkten A und B befeſtigt, und mit einer Kraft $= \Pi$
pannt iſt, werde auf irgend eine Art, entweder durch
ſchlagen, oder indem man ſie erſt zur Seite biegt,
dann wieder losläßt, in Bewegung gebracht.

Es iſt willkührlich, wovon man die Zeit der Be-
gung anrechnet; indeß wollen wir hier, der Be-
nmtheit wegen, dazu den Augenblick wählen, wenn
ganze Saite ihre natürliche geradlinigte Geſtalt AxB
der bekommen hat. Da hier nur von ſehr kleinen
hwingungen die Rede iſt, ſo kann man füglich an-
men, daß die Ausweichungen jedes einzelnen Punk-
der Saite von ſeinem anfänglichen Orte x in der
AxB ſenkrechten Linie xy geſchehen, oder daß ſeine
ſchwindigkeit $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ längs der Axe AB, $= o$ ſey. Aus
n dem Grunde iſt es auch geſtattet, die Ausdehnung
Saite während der Bewegung außer Acht zu laſſen;
die Länge des Bogens Ay $= s$, der Abſciſſe Ax $= x$
ch zu ſetzen.

Es sey demnach y der Ort, wohin der Punkt nach Verlauf der Zeit t gelangt ist: der durchlaufene Raum xy, als Ordinate, die zur Abscisse Ax = x gehört, = y. Ferner sey die ganze Länge der Saite = a, und ihre Masse, oder Gewicht = K.

Was endlich die Kräfte betrifft, denen die Saite während ihrer Bewegung ausgesetzt ist, so rühren diese bloß von ihrer Befestigung her, und sind

1) die Spannkraft = Π, wodurch sie bey A und B nach den entgegen gesetzten Richtungen Aa und Bb gezogen wird, und

2) eine darauf senkrechte Kraft; womit der feste Punkt A seitwärts, nach der Richtung Aa, sie zurückhält. Sie ist nicht, wie die Spannung Π, unveränderlich, sondern richtet sich nach der langsamern oder schnellern Bewegung der Saite, und hängt deshalb von der Zeit t ab. Wir wollen sie, wie oben geschehen ist, = G setzen.

Nach diesen vorläufigen Erinnerungen hat man nun gegenwärtig: $E = o$, $F = \Pi$, $p = o$, $q = o$, $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = o$, und $x = s$, also

$$p' = o,\ q' = -\frac{K}{2ag}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right);$$ daher wird:

$$Gs - \Pi y + \frac{K}{2ag}\int ds \int ds \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = o.$$

§. 325.

Wenn man diese Gleichung zweymal nach s diffe-

ziirt, ſo bekommt man, weil G von s unabhängig, ſo hierbey unveränderlich iſt:

$$\frac{K}{2ag}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \Pi\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) = 0,$$

oder, $\frac{2ag\Pi}{K} = c^2$ geſetzt:

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = c^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right).$$

Um hiervon das vollſtändige Integral zu erhalten, trachte man y als eine Funktion φu von einer neuen veränderlichen Größe u, die von t und s auf irgend eine Art abhängen mag, und ſetze der Kürze wegen $\frac{d.\varphi u}{du} = \varphi' u$, $\frac{d\varphi' u}{du} = \varphi'' u$; ſo wird:

$$dy = \varphi' u \,.\, du = \varphi' u \left[\left(\frac{du}{ds}\right) ds + \left(\frac{du}{dt}\right) dt\right],$$

folglich:

$$\left(\frac{dy}{ds}\right) = \left(\frac{du}{ds}\right) \varphi' u, \text{ und } \left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right) \varphi' u;$$

alſo ferner:

$$\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) = \left(\frac{d^2u}{ds^2}\right) \varphi' u + \left(\frac{du}{ds}\right)^2 \varphi'' u, \text{ und}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) \varphi' u + \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \varphi'' u, \text{ mithin:}$$

$$\left[\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) - c^2\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right)\right] \varphi' u + \left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - c^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2\right] \varphi'' u = 0.$$

Dieſe Gleichung wird erfüllt, wenn man

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) - c^2\left(\frac{d^2u}{ds^2}\right) = 0, \text{ und}$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - c^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = 0 \text{ ſetzt.}$$

Aus Letzterm folgt: $c\left(\frac{du}{ds}\right) = \mp\left(\frac{du}{dt}\right)$; dem die einfachſte Art Genüge geleiſtet wird, wenn $\left(\frac{du}{dt}\right) = c$, und $\left(\frac{du}{ds}\right) = \mp 1$ annimmt. Dies entſpringt durch Integrirung:

$u = ct \mp M$, und $u = N \mp s$,

wo M eine Funktion von s, und N eine Funktion von t ſeyn kann.

Läßt man nun erſtere für $s = o$, und letztere $t = o$ verſchwinden, ſo erhält man $N = ct$, und $M = \mp s$, wodurch dann $u = ct \mp s$, und folglich allgemein:

$y = \varphi(ct + s) + \psi(ct - s)$ wird.

§. 326.

Da für den Anfangspunkt A, oder für $s =$ auch $y = o$ ſeyn muß, ſo bekommt man

$o = \varphi . ct + \psi . ct$, oder $\psi . ct = -\varphi . ct$;

alſo ſtehen dieſe beyden Funktionen in einer ſolch Beziehung gegen einander, daß ihre Werthe, für nerley Werth der veränderlichen Größe, allemal ander gleich und entgegengeſetzt ſind; daher iſt a überhaupt:

ψ.

$\psi(ct - s) = -\varphi(ct - s)$, mithin

$y = \mathfrak{D}(ct + s) - \varphi(ct - s)$.

Ferner muß auch für das andere Ende B, oder ir $s = a$, $y = o$ ſeyn; alſo hat man zur zweyten Bedingung:

$$o = \varphi(ct + a) - \varphi(ct - a),$$

oder: $\varphi(ct + a) = \varphi(ct - a)$.

m die Forderung, die in dieſer Gleichung enthalten , noch einfacher darzuſtellen, ſetze man $ct - a = z$, wird $ct + a = z + 2a$, folglich $\varphi(z + 2a) =$ z. Es muß alſo die Funktion φz von ſolcher Beſchaffenheit ſeyn, daß ſie wieder eben den Werth bekommt, nachdem die veränderliche Größe z in ihr um a gewachſen iſt.

§. 327.

Nach Verlauf einer Zeit $t' = t + \frac{2a}{c}$ iſt demnach jeder einzelne Punkt y der Saite wieder an eben den Ort, wo er ſich zur Zeit t befand, zurückgekehrt; daher hat man für die Dauer einer ganzen Schwingung derſelben: $t' - t = \frac{2a}{c}$. Wenn nemlich xy die größte Ausweichung des Punktes x aus ſeiner natürlichen Lage bedeutet, ſo verfließt die Zeit $\frac{2a}{c}$, bevor derſelbe aus durch x zur andern Seite der Abſciſſenlinie AxB hergegangen, und von dort wieder denſelben Weg bis rückwärts durchlaufen iſt.

§. 328.

1. Da $c^2 = 2ag \cdot \frac{\Pi}{K}$ ist (§. 325.), so wird, wenn wir die ganze Dauer einer Schwingung T nennen:

$$T = \sqrt{\frac{2aK}{g\Pi}}.$$

Also verhält sich die Schwingungszeit einer Saite direkt, wie die Quadratwurzel aus ihrer Länge und ihrem Gewichte, und verkehrt, wie die Quadratwurzel aus der Spannung derselben.

2. Es sey n die Anzahl der Schwingungen, die sie binnen einer Sekunde verrichtet, so hat man $T : 1'' = 1 : n$, folglich:

$$n = \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{g\Pi}{2aK}}.$$

3) Setzt man das Gewicht der Saite für die Länge $= 1$, $= x$, so wird ihr ganzes Gewicht $K = aK$, mithin:

$$n = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{g\Pi}{2K}};$$

daher verhält sich bey unveränderter Spannung einer und derselben Saite die Anzahl ihrer Schwingungen in einer Sekunde verkehrt, wie ihre Länge; worauf sich die bekannte Einrichtung des Monochordes gründet.

Von der Schwingung elastischer Ruthen und Klingen.

§. 329.

Für sehr geringe Schwingungen einer elastischen

Ruthe AB, die im natürlichen Zustande geradlinigt ist, elten wieder dieselben Voraussetzungen, daß $s = x$, nd $\left(\frac{dx}{dt}\right) = o$ sey. Da nun außerdem $p = o$, $q = o$, nd wegen der anfänglichen geraden Gestalt der Ruthe, uch $R = o$ ist, so verwandelt sich in gegenwärtigen alle die allgemeine Gleichung (§. 323.) in folgende:

$$Gs - Fy + \frac{K}{2ag}\int ds \int ds \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -E\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right),$$

oraus durch zweymaliges Differenziiren nach s die leichung

$$\frac{K}{2ag}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = F\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) - E\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right) \text{ entspringt.}$$

§. 330.

8. 50. **Aufgabe.** Es sey das eine Ende A der elastischen Ruthe in eine Wand eingeschlossen, und das andere Ende B frey. Man fragt, wie groß unter diesen Umständen die Dauer ihrer Schwingungen seyn werde.

Aufl. 1) Nach Verlauf der Zeit t sey der Punkt B bis y fortgerückt, so daß alsdann die ganze Ruthe die gekrümmte Form AyD angenommen hat. Man nehme in B den Anfangspunkt der Abscissen, und setze $x = x$, $xy = y$.

2) Da auf den Punkt B keine Kräfte wirken, so hat man hier $F = o$, $G = o$, folglich:

$$\frac{K}{2ag}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -E\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right),$$

oder, wenn man $\frac{2agE}{K} = c^4$ ſetzt:

$$c^4 \left(\frac{d^4y}{ds^4}\right) = -\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right).$$

3) Wegen der Differenzialgröße vom vierten Grade linker Hand müßte das vollſtändige Integral dieſer Gleichung eigentlich vier unbeſtimmte Funktionen von s und t in ſich faſſen: man hat aber bis jetzt noch kein Mittel entdeckt, daſſelbe in dieſer allgemeinen Form darſtellen zu können. Indeß beruhet auch gerade nicht ſehr viel darauf, jede mögliche Geſtalt der Kurve anzugeben, und es iſt zu unſerm Zwecke ſchon hinreichend, wenn ein beſonderes Integral der Gleichung Genüge thut, das zugleich auf gleichzeitige Schwingungen hinführt. Zu dem Ende ſetze man nach der Analogie der unendlich kleinen Pendelſchwingungen:

$$y = M \operatorname{Sin} \varepsilon t,$$

wo M einen Faktor bedeutet, der in Beziehung auf t unveränderlich iſt, und daher nur allein von s abhängen kann.

4) Man erhält hieraus

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -\varepsilon^2 M \operatorname{Sin} \varepsilon t,$$

und $\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right) = \frac{d^4M}{ds^4} . \operatorname{Sin} \varepsilon t$, folglich (2)

$$c^4 . \frac{d^4M}{ds^4} = \varepsilon^2 M,$$

oder, wenn man $e = \frac{c^2}{f^2}$ ſetzt,

$$f^4 \cdot \frac{d^4M}{ds^4} = M.$$

5) Dieſer Gleichung entſprechen folgende vier beſondere Werthe von M:

$$e^{\frac{s}{f}},\ e^{-\frac{s}{f}},\ \mathrm{Sin}\,\frac{s}{f},\ \mathrm{Cos}\,\frac{s}{f}.$$

Daher läßt ſich allgemein:

$$M = \alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{-\frac{s}{f}} + \gamma\,\mathrm{Sin}\,\frac{s}{f} + \delta\,\mathrm{Cos}\,\frac{s}{f}$$ annehmen;

und es wird folglich:

$$y = \mathrm{Sin}\,\frac{c^2 t}{f^2}\left(\alpha e^{\frac{s}{f}} + \beta e^{-\frac{s}{f}} + \gamma\,\mathrm{Sin}\,\frac{s}{f} + \delta\,\mathrm{Cos}\,\frac{s}{f}\right).$$

6) Aus §. 329. bekommt man für die Summe der Momente aller auf den Bogen By wirkenden Kräfte in Bezug auf den Punkt y:

$$\frac{K}{2ag}\int ds \int ds \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -E\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right),$$

und für die bloße Summe dieſer Kräfte:

$$\frac{K}{2ag}\int ds \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -E\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right).$$

Da nun beyde Summen für den Anfangspunkt B verſchwinden, ſo folgt, daß für $s = o$, ſowohl $\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)$, als auch $\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right) = o$ ſeyn müſſe. Dieſe Bedingungen geben:

$\alpha + \beta - \delta = o$, und $\alpha - \beta - \gamma = o$, oder

$\alpha + \beta = \delta$, und $\gamma = \alpha - \beta$.

7) Ferner ist am andern befestigten Ende A, für $s = a$, $y = o$, und weil daselbst die Kurve mit Axe BA zusammenfällt, auch $\left(\frac{dy}{ds}\right) = o$; folglich, wir der Kürze wegen $\frac{a}{f} = \omega$ setzen:

$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \operatorname{Sin} \omega + \delta \operatorname{Cos} \omega = o$, und

$\alpha e^{\omega} - \beta e^{-\omega} + \gamma \operatorname{Cos} \omega - \delta \operatorname{Sin} \omega = o$.

8) Beyde Gleichungen addirt und subtrah geben:

$2\alpha e^{\omega} + \gamma (\operatorname{Sin}\omega + \operatorname{Cos}\omega) + \delta(\operatorname{Cos}\omega - \operatorname{Sin}$
$= o$, u

$2\beta e^{-\omega} + \gamma (\operatorname{Sin}\omega - \operatorname{Cos}\omega) + \delta (\operatorname{Sin}\omega + \operatorname{Cos}$
$= o$,

und wenn man darin für γ und δ ihre Werthe aus substituirt, erhält man:

$$\alpha (\operatorname{Cos}\omega + e^{\omega}) - \beta \operatorname{Sin}\omega = o$$

$$\beta (\operatorname{Cos}\omega + e^{-\omega}) + \alpha \operatorname{Sin}\omega = o,$$

$$\text{also } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\operatorname{Cos}\omega + e^{\omega}}{\operatorname{Sin}\omega} = \frac{-\operatorname{Sin}\omega}{\operatorname{Cos}\omega + e^{-\omega}},$$

$$\text{mithin } -\operatorname{Cos}\omega\,(e^{\omega} + e^{-\omega}) = 2,$$

woraus der Werth von ω leicht gefunden werden k

9) Es sey nun nach Verlauf einer Zeit t', Anfange der Bewegung angerechnet, die Gestalt Kurve AyD wieder genau dieselbe, als zur Zeit t, ch die Ordinate y, die zu einerley Bogen By =

ört, für die beyden Zeiten t und t' von einerley Größe; o wird erfordert, daß $\mathrm{Sin}\left(\frac{c^2t}{f^2}\right) = \mathrm{Sin}\left(\frac{c^2t'}{f^2}\right)$ sey. Da- ier hat man: $\frac{c^2t'}{f^2} = \frac{c^2t}{f^2} + 2\pi$, oder $t' = t + \frac{2\pi f^2}{c^2}$; nithin für die Zeit einer ganzen Schwingung, oder ei- es Hin- und Herganges

$$t' - t = \frac{2\pi f^2}{c^2} = \frac{2\pi a^2}{\omega^2 c^2} = \frac{2\pi a^2}{\omega^2}\sqrt{\frac{K}{2agE}}.$$

§. 331.

Aus der Gleichung (8) erhellet, daß Cos ω nega- v seyn müsse; daher kann entweder

$\omega > \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi$ u. s. w., oder

$< \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi$ seyn.

Nan setze zuvörderst $\omega = \frac{1}{2}\pi + \lambda$, so erhält man:

$$\mathrm{Sin}\,\lambda\,(e^{\frac{1}{2}\pi} \cdot e^{\lambda} + e^{-\frac{1}{2}\pi} e^{-\lambda}) = 2.$$

Nun ist bekanntlich $\mathrm{Sin}\,\lambda = \lambda - \frac{1}{6}\lambda^3 + \frac{1}{120}\lambda^5 - \ldots$

$$e^{\lambda} = 1 + \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{6}\lambda^3 + \frac{1}{24}\lambda^4 \ldots$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda^3 + \frac{1}{24}\lambda^4 \ldots$$

ferner $e^{\frac{1}{2}\pi} = 4{,}81048$, $e^{-\frac{1}{2}\pi} = 0{,}20788$, wodurch ie Gleichung in folgende Reihe aufgelöst wird:

$$2 = 5{,}01836\,\lambda + 4{,}60260\,\lambda^2 + 1{,}67279\,\lambda^3 - 0{,}16728\,\lambda^5.$$

Die ersten beyden Glieder dieser Reihe geben sehr ahe $\lambda = 0{,}3$, und wenn man $\lambda = 0{,}3 + q$ setzt, be- ommt man mit Zuziehung der übrigen:

$$0{,}035498 - 8{,}22616q = 0, \text{ also}$$

$$q = 0{,}00431.$$

Daher ist genauer: $\lambda = 0{,}30431$, und

$\omega = \frac{1}{2}\pi + \lambda = 1{,}87511$, oder beynahe $= \frac{3}{5}\pi$. Eben so findet man, wenn man $\omega = \frac{3}{2}\pi - \lambda$ setzt, $\lambda = 0{,}01829$, folglich $\omega = 4{,}69408$, welches von $\frac{15}{2}\pi$ nur wenig verschieden ist. Noch unbedeutender sind die Abweichungen der höhern Werthe des Winkels ω von $\frac{7}{2}\pi$, $\frac{9}{2}\pi$ u. s. f., so daß man sie ohne Bedenken weglassen kann. Daher hat man für ω folgende Reihe von Werthen:

$$\frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi,\ \frac{9}{2}\pi,\ \frac{11}{2}\pi \text{ u. s. f.}$$

und folglich eben so viel verschiedene Schwingungsarten, die insgesammt zu gleicher Zeit statt haben.

§. 332.

Aus der gefundenen Zeit einer halben Schwingung der Ruthe $= \frac{\pi a^2}{\omega^2}\sqrt{\frac{K}{2agE}}$ ergiebt sich die Anzahl der halben Schwingungen, die sie in einer Sekunde verrichtet: $n = \frac{\omega^2}{\pi a^2}\sqrt{\frac{2agE}{K}}$.

Wofern diese Anzahl so groß ist, oder die Schwingungen mit einer solchen Schnelligkeit geschehen, daß dadurch höhere Töne hervorgebracht werden, so giebt es deren allemal eine unendliche Menge, und ihre Höhen wachsen in folgenden Verhältnissen:

$$\frac{36}{25},\ 9,\ 25,\ 49,\ 81 \text{ u. s. w.}$$

Wegen ihres beträchtlichen Abstandes wird man zwar nicht leicht mehr, als einen oder höchstens zwey

n dieſen Tönen zu gleicher Zeit wahrnehmen können; ß aber demungeachtet die übrigen nicht minder wirk- h vorhanden ſind, davon überzeugt man ſich hinläng- h durch nachſtehende Verſuche, die **Lambert** mit ei- m Meſſingdrathe angeſtellt hat:

1. So lange das freye ſchwingende Ende deſſel- n unter 1 Zoll Länge hatte, war nur ein einziger deut- her Ton bemerkbar.

2. Für 15 Lin. Länge bekam jener Ton mehr Tie- und ein zweyter wurde außer ihm vernehmlich, der- h davon um zwey volle Oktaven und darüber noch n etwas mehr als eine Quinte unterſchied.

3. Bey zunehmender Länge ging der erſtere all- ählig, wegen zu großer Tiefe, verloren, und der zweyte urde jetzt Hauptton. Für eine Länge von ungefähr) Lin. kam ſchon ein dritter Ton zum Mitlaute.

4. Bey fortgeſetzter Verlängerung wurde auch der eyte nach und nach undeutlich, und verlor ſich am nde ganz. Der dritte nahm an Höhe immer mehr ıd mehr ab, und bey 50 Lin. Länge hatte ſich bereits n vierter Ton eingemiſcht.

Man ſieht hieraus, wie mit wachſender Länge des rathes von den vorangehenden Tönen einer nach dem ndern verſchwindet, und ſtatt deſſen einer der folgenden örbar wird; etwa ſo, wie eine Reihe von Gegenſtän- en, die das Auge nicht mit einem Blicke überſchauen ann, bey allmähliger Veränderung des Geſichtsfeldes ich nach und nach theilweiſe demſelben darſtellt.

Um auch in Anſehung der Folge der Töne die Rich-

tigkeit der Theorie, so viel es sich aus dem Beygebrachten thun läßt, zu prüfen, setze man beym zweyten Versuche den ersten Ton = 1, den zweyten = p, so ist zu Folge der Angabe p etwas gröser als $2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 6$. Nach dem oben gefundenen Verhältnisse erhält man dagegen:

$$\frac{36}{25} : 9 = 1 : p; \text{ also } p = 6\frac{1}{4},$$

welches mit dem Versuche sehr gut übereinstimmt.

§. 333.

Zur Bestimmung der absoluten Anzahl der Schwingungen, die die elastische Ruthe oder Klinge in einer Sekunde vollendet, ist noch erforderlich, ihr Moment der Elasticität E zu wissen. Man hänge in dieser Absicht an den Endpunkt B derselben irgend ein Gewicht P, und bemerke, um wieviel dadurch dieser Punkt tiefer, als durch das bloße Gewicht K der Ruthe herabgebogen wird. Wir wollen diesen Raum = h nennen.

Nach §. 319. 9. hat man nun gegenwärtig $p = 0$, $q = \frac{K}{a}$, $F = 0$, $G = -P$, und unter der Voraussetzung, daß die Biegung gering sey, $s = x$, mithin:

$$Ps + \frac{Ks^2}{2a} = E\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right).$$

Hiervon ist das Integral:

$$B + \tfrac{1}{2}Ps^2 + \frac{Ks^3}{6a} = E\left(\frac{dy}{ds}\right),$$

ıd wenn man nochmals integrirt, erhält man:

$$A + Bs + \tfrac{1}{6}Ps^3 + \frac{Ks^4}{24a} = Ey.$$

)a am andern Endpunkte A, oder für $s = a$, ſowohl $= o$, als auch $\frac{dy}{ds} = o$ iſt, ſo wird:

$$A + Ba + (\tfrac{1}{6}P + \tfrac{1}{24}K)\, a^3 = o, \text{ und}$$
$$Ba + (\tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{6}K)\, a^3 = o,$$

mithin $A = (\frac{1}{3}P + \frac{1}{8}K)\, a^3$

eißt ferner f der ganze Raum BD, durch den der unkt B herabſinkt, ſo iſt für $s = o$, $y = f$, alſo:

$$Ef = A = (\tfrac{1}{3}P + \tfrac{1}{8}K)\, a^3$$

Endlich ſey noch e die Tiefe, wozu der Punkt B rabgezogen wird, wenn die Ruthe bloß ihrem eigenen ewichte ausgeſetzt iſt, ſo hat man für $P = o$, $f = e$; ſo $Ee = \frac{1}{8}Ka^3$, und weil $h = f - e$ iſt, $Eh = \frac{1}{3}Pa^3$, lglich $E = \frac{Pa^3}{3h}$.

Dieſer Werth für E in obiger Formel (§. 332.) bſtituirt, giebt:

$$n = \frac{\omega^2}{\pi}\sqrt{\frac{2gP}{3hK}}.$$

Verſuch. *) Ein Meſſingdrath, der 143 Rheinl. ıien lang war, und 11,4 Gran wog, wurde am freyen ıde B mit 5 Gran behängt, und dadurch um 24 Li- en tiefer, als von ſeinem eigenen Gewichte, niedergebo- n. Nachdem das Gewicht abgenommen war, machte innerhalb 30 Sekunden Zeit 142 Schwingungen.

*) a. a. O. pag. 48.

Da hier von den Schwingungen der langsamsten Art die Rede ist, so hat man $\omega = \frac{3}{5}\pi$, also $\frac{\omega^2}{\pi} = \frac{9}{25}\pi$; ferner ist $g = 15\frac{1}{8} \cdot 144''' = 2250'''$, $h = 24'''$, $K = 11{,}4$, $P = 5$, folglich:

$$\log \sqrt{\frac{2gP}{3hK}} = 0{,}7189226$$

$$\text{dazu } \log \frac{\omega^2}{\pi} = 0{,}0534524$$

$$\text{giebt } \log n = 0{,}7723750 .$$

$$n = 5{,}92.$$

Der Beobachtung zufolge ist $n = 4{,}73$. Aus andern Versuchen hingegen, die **Lambert** mit kürzeren Stücken desselben Drathes machte, fand er durch Hülfe der beobachteten Töne nach angestellter Reduktion $n = 5{,}43$ *); welches dem berechneten Werthe, und gewiß auch der Wahrheit, näher kommt, weil beym bloßen Abzählen der Schwingungen sehr leicht ein merklicher Irrthum vorgehen kann.

§. 334.

Wenn die elastische Ruthe am Endpunkte A bloß mit einer Zange gefaßt ist, so daß sie sich um diesen Punkt frey drehen kann, so bleibt das nächste Element bey A während der Bewegung nicht stets in seiner anfänglichen Lage; es behält aber dagegen seine geradlinigte Form, weil offenbar durch das Drehen der Ruthe die Biegung am Unterstützungspunkte vermieden wird.

*) pag. 72.

Man hat also in diesem Falle für $s = a$, $y = o$, und $\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) = o$; oder, wenn wieder $\frac{a}{f} = \omega$ gesetzt wird:

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \operatorname{Sin} \omega + \delta \operatorname{Cos} \omega = o, \text{ und}$$
$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} - \gamma \operatorname{Sin} \omega - \delta \operatorname{Cos} \omega = o.$$

Hieraus folgt:

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} = o, \text{ und}$$
$$\gamma \operatorname{Sin} \omega + \delta \operatorname{Cos} \omega = o,$$

und wenn man noch in letzterer Gleichung für γ und δ ihre Werthe aus §. 330. 6. substituirt, verwandelt sie sich in:

$$\alpha (\operatorname{Cos} \omega + \operatorname{Sin} \omega) + \beta (\operatorname{Cos} \omega - \operatorname{Sin} \omega) = o;$$

daher wird $\frac{-\beta}{a} = e^{2\omega} = \frac{\operatorname{Cos} \omega + \operatorname{Sin} \omega}{\operatorname{Cos} \omega - \operatorname{Sin} \omega} = \frac{1 + \operatorname{tang} \omega}{1 - \operatorname{tang} \omega} =$ tang $(45° + \omega)$.

Man setze tang $(\frac{1}{4}\pi + \omega) = \operatorname{Cot} \varphi$, so erhält man:

$\frac{1}{4}\pi + \omega = \frac{1}{2}\pi - \varphi$, $\frac{3}{2}\pi - \varphi$, $\frac{5}{2}\pi - \varphi$ u. s. w.

folglich: $\omega = \frac{1}{4}\pi - \varphi$, $\frac{5}{4}\pi - \varphi$, $\frac{9}{4}\pi - \varphi$ u. s. f.

worin $\operatorname{Cot} \varphi = e^{2\omega}$, also φ desto kleiner ist, je größer ω genommen wird.

Was den ersten Werth von ω, nemlich $\frac{1}{4}\pi - \varphi$ betrifft, so ist für diesen offenbar $\varphi = \frac{1}{4}\pi$; denn dadurch wird $\omega = o$, und folglich der Gleichung Genüge geleistet.

Beym zweyten bekommt man tang $\varphi = e^{-2\omega} = \frac{\varphi\varphi}{\pi\pi}$, und weil hier wegen des beträchtlichen Nenners

ſchen vorauszuſehen iſt, daß D ſehr gering ſeyn kann man $e^{2\vartheta} = 1$ ſetzen, wodurch $\tang \frac{1}{2}\omega = e^{-\frac{1}{2}\pi} = 0{,}000388$ wird. Es iſt alſo ſehr $\omega = \frac{1}{4}\pi$. Noch weit geringer iſt der Bogen den folgenden Werthen von ν, die daher den Nahmen der Reihe $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{13}{4}\pi$ u. ſ. f. um nichts mehr ſind, was irgend in Betracht gezogen zu werden diente.

Demnach ſind die Töne, die unter gegebenen Umſtänden durch die elaſtiſche Ruthe hervorgebracht werden, höher, als in dem vorhin betrachteten, und ſtehen unter einander in folgenden Verhältniſſen

25, 81, 169, 289 u. ſ. w.

§. 335.

Aufgabe. Die Dauer der Schwingungen einer elaſtiſchen Ruthe zu beſtimmen, wenn ſowohl ihr Ende A, wie auch das andere B in einer Stimme befeſtigt iſt; jedoch unter der Vorausſetzung, daß dadurch weder gebogen noch geſpannt wird.

Auflöſung 1) Da hier $F = 0$ iſt, ſo bekommt man eben die Fundamentalgleichung, wie im §. 330; bleibt auch der allgemeine Ausdruck für y (5) derſelbe, nur daß darin die Größe f, nebſt den Koefficienten α, β, γ, δ, auf andere Art beſtimmt werden muß.

2) Zuvörderſt iſt für $s = 0$, ſowohl y als $\left(\frac{dy}{ds}\right) = 0$, mithin: $\alpha + \beta + \delta = 0$, und $\alpha - \beta = 0$, oder $\gamma = \beta - \alpha$ und $\delta = -(\alpha + \beta)$.

3) Für

3) Dann ist auch für den andern Endpunkt, oder $s = a$, y und $\left(\frac{dy}{ds}\right) = o$; also, wenn wieder $= \omega$ heißt:

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \operatorname{Sin}\omega + \delta \operatorname{Cos}\omega = o, \text{ und}$$
$$\alpha e^{\omega} - \beta e^{-\omega} + \gamma \operatorname{Cos}\omega - \delta \operatorname{Sin}\omega = o.$$

4) Wenn man diese Gleichungen theils addirt, theils subtrahirt, so erhält man:

$$2\alpha e^{\omega} + \gamma(\operatorname{Sin}\omega + \operatorname{Cos}\omega) + \delta(\operatorname{Cos}\omega - \operatorname{Sin}\omega) = o,$$
$$2\beta e^{-\omega} + \gamma(\operatorname{Sin}\omega - \operatorname{Cos}\omega) + \delta(\operatorname{Sin}\omega + \operatorname{Cos}\omega) = o,$$

d darin für γ und δ ihre Werthe substituirt, giebt:

$$\alpha(e^{\omega} - \operatorname{Cos}\omega) + \beta \operatorname{Sin}\omega = o$$
$$\beta(e^{-\omega} - \operatorname{Cos}\omega) - \alpha \operatorname{Sin}\omega = o;$$

woraus $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\operatorname{Sin}\omega}{e^{-\omega} - \operatorname{Cos}\omega} = \frac{\operatorname{Cos}\omega - e^{\omega}}{\operatorname{Sin}\omega}$, oder

$$2 = \operatorname{Cos}\omega(e^{\omega} + e^{-\omega}) \text{ folgt.}$$

5) Da hiernach $\operatorname{Cos}\omega$ nothwendig positiv seyn ß, so führt dies auf folgende Reihe von Werthen, der Bogen ω zu gleicher Zeit annimmt:

$$\tfrac{1}{2}\pi - \varphi,\ \tfrac{3}{2}\pi + \varphi',\ \tfrac{5}{2}\pi - \varphi'' \text{ u. s. f.}$$

6) Der erste Werth für ω, der sogleich in die Au- fällt, ist $\omega = o$. Außer ihm giebt es unter $\frac{1}{2}\pi$ nen andern mehr: denn das Differenzial von obigem sdrucke, $\operatorname{Cos}\omega(e^{\omega} - e^{-\omega}) - \operatorname{Sin}\omega(e^{\omega} + e^{-\omega})$ sowohl für ächt gebrochene ω, als auch für solche, zwischen 1 und $\frac{1}{2}\pi$ fallen, negativ, und zeigt also,

daß der Ausdruck von 2 bis zu o beständig abnehm indem ω von o bis zu $\frac{1}{2}\pi$ anwächst.

7) Durch den zweyten Werth $\frac{1}{2}\pi + \varphi'$ verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$2 = \text{Sin } \varphi' \left(e^{\frac{1}{2}\omega} e^{\varphi'} + e^{-\frac{1}{2}\pi} e^{-\omega'} \right)$$

und wenn man den Ausdruck rechter Hand in die Reihe auflößt, erhält man:

$$2 = 111{,}32669\,\varphi' + 111{,}30871\,\varphi^3 \ldots$$

woraus $\varphi' = 0{,}01765$, und $\omega = 4{,}73002$ wird.

8) In den folgenden Werthen von ω sind die Größen φ'', φ''' u. s. f. höchst unbedeutend, und können daher füglich weggelassen werden, so daß also ω mit den Gliedern der Reihe $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$ sehr genau zusammenfällt.

§. 336.

Wenn die beyden Enden der elastischen Ruthe A und B bloß gefaßt sind, so hat man sowohl für s = o als s = a, y und $\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) = o$.

Daher wird $\alpha + \beta + \delta + o$, und $\alpha + \beta = \delta$: also $\delta = o$. Ferner

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} + \gamma \text{ Sin } \omega + \delta \text{ Cos } \omega = o, \text{ und}$$

$$\alpha e^{\omega} + \beta e^{-\omega} - \gamma \text{ Sin } \omega - \delta \text{ Cos } \omega = o.$$

Beyde Gleichungen von einander subtrahirt, geben $\gamma \text{ Sin } \omega + \delta \text{ Cos } \omega = o$, folglich, weil $\delta = o$ ist, Sin ω = o, mithin Sin ω = o; wodurch ω folgende Werthen bekommt:

ω = 2π, 3π, 4π u. s. f.

Es hat also dieser Fall vor den übrigen das Auszeichnende, daß die verschiedenen zu gleicher Zeit erfolgenden Töne unter sich in einem besonders einfachen Verhältnisse stehen.

Etwas über Uhrfedern.

§. 337.

Ueber die zurückweichende Kraft aufgewundener Spiralfedern hat uns **Berthoud** in seinem Traité des orloges marines eine Menge sehr schöner Versuche mitgetheilt, die er durch Hülfe einer besondern von ihm erfundenen Elasticitätswage (balance elastique) angestellt hat. Ich will von der Einrichtung dieses Instruments nur so viel hier angeben, als zum richtigen Verständnisse der gedachten Versuche nöthig seyn wird.

Fig. 51. 1. Die vertikale Scheibe pmq hat im Mittelpunkte eine Oeffnung, wodurch eine horizontale Axe C geht. Sowohl die Axe ist für sich, wie auch die Scheibe um sie, besonders beweglich.

2. Die Feder, womit der Versuch gemacht werden soll, wird mit dem einen Ende am Anfange der Axe, und mit dem andern auf der Scheibe irgendwo in f befestigt.

3. Wenn man nun letztere um einen beliebigen Winkel oCn = φ nach der Seite pmq umdreht, und sie sodann in ihrer jetzigen Lage auf einer dahinter liegenden Fläche festschraubt, so wird die Feder um ei-

2) Diese Gleichung durch $\frac{d\omega}{dt}$ multiplicirt, und sodann integrirt, giebt:

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = C - \frac{2geK\omega^2}{\pi Mh^2}$$

und wenn man die anfängliche Winkelgeschwindigkeit $= \gamma$ setzt, wird für $t = o$, $\gamma^2 = C$, mithin:

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = \gamma^2 - \frac{2geK\omega^2}{\pi Mh^2}.$$

3) Es sey die grösste Ausweichung der Unruhe, oder ihr halber Schwingungsbogen $= \zeta$, so wird für $\omega = \zeta$, $\frac{d\omega}{dt} = o$, also: $\frac{2geK\zeta^2}{\pi Mh^2} = \gamma^2$, oder $\zeta = \gamma\sqrt{\frac{\pi Mh^2}{2geK}}$.

4) Hierdurch wird $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = \gamma^2\left(1 - \frac{\omega^2}{\zeta^2}\right)$, folglich

$$\gamma dt = \frac{d\omega}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\zeta^2}\right)}},$$

und wenn man integrirt:

$$\gamma t = \zeta \cdot \text{arc Sin } \frac{\omega}{\zeta}.$$

5) Darin $\omega = \zeta$ gesetzt, giebt die Zeit einer halben Schwingung

$$t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{\pi Mh^2}{2geK}} = \sqrt{\frac{\pi^3 h^2 M}{8geK}}.$$

§. 340.

Da in der gefundenen Formel die gröſste Ausweichung ζ der Unruhe oder Feder nicht vorkommt, so folgt, daſs die Dauer ihrer Schwingungen unverändert dieselbe sey, sie mögen in Bogen geschehen, von welcher Gröſse man will. Diese merkwürdige Eigenschaft der Spiralfedern, die beym Pendel nur für unendlich kleine Schwingungsbogen statt findet, hat schon s'Gravesande aus mehreren angestellten Beobachtungen wahrgenommen. Man sehe hierüber dessen Elementa Physices Tom. I. art. 784.

§. 341.

Es sey die Unruhe eine cylindrische Platte vom Halbmesser = f, ihre Masse = M; ferner ein Gewicht, das an ihrem Umfange angebracht, der elastischen Kraft der Feder für den Umdrehungswinkel $\varphi = 180°$ das Gleichgewicht hält, = G, so wird $h^2 = \frac{1}{2} f^2$, und Ke = Gf, folglich die Zeit einer halben Schwingung

$$t = \sqrt{\frac{\pi^3 fM}{32gG}},$$

welches eben die Formel ist, die **Atwood** in seiner Abhandlung über die Vibrationen der Uhrfedern *) auf ähnliche Art hergeleitet hat. Er führt zu ihrer Prüfung folgendes Beyspiel an:

Bey einer Uhr von **Kendal**, nach Harrisons Me-

*) S. Philos. transact. 1794 P. I. pag. 119. u. f.

thode gearbeitet, die Cook auf ſeiner letzten Reiſe in die Südſee mitnahm, war der Halbmeſſer der Unruhe f = $1\frac{1}{8}$ engl. Zoll, ihr Gewicht M = 42 Gran. Das Gewicht G fand er durch einen Verſuch = 48 Gran.

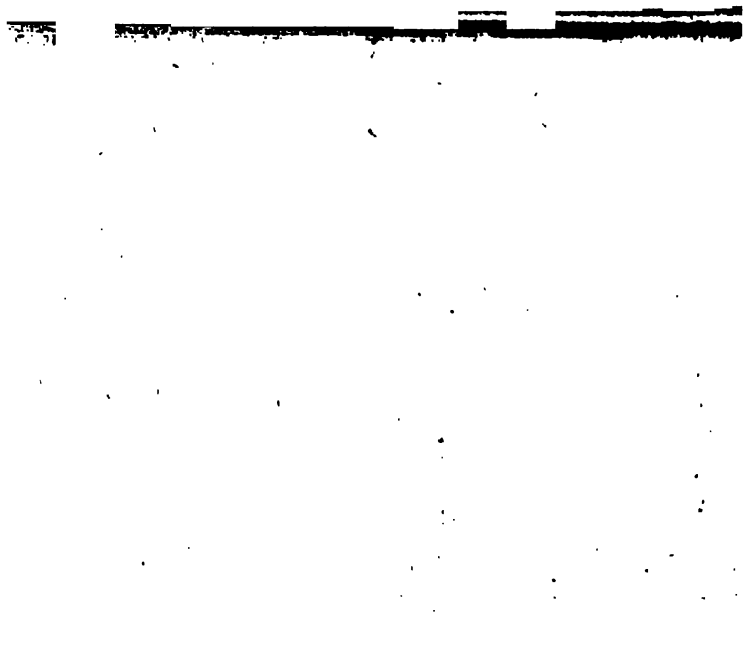
Man erhält alſo

$$\log \pi^3 fM = 3{,}1658514$$
$$\log 32gG = 5{,}1709185$$
$$1{,}9949329 - 4$$
$$\log t = 0{,}9974664 - 2$$
$$t = 0{,}0994 \text{ Sec.}$$

Die Uhr machte in einer Secunde 5 Schwingungen, alſo war die Zeit einer halben Schwingung = 0,1 Sec., welche von der gefundenen nur um 0,0006 Sec. abweicht.

Druckfehler im zweyten Theile.

S. 32. Z. 3. fällt — weg.
— 64. — 7. von unten ſtatt lgt^2, lies $I - gt^2$
— 110. — 7. ſtatt T, lies I
— 133. — 14. fällt *) weg.
— 136. — 7. ſtatt $+\sqrt{}$, lies $=\sqrt{}$
— 139. — 5. von unten ſt. — K — W, l. = K — W
— 146. — 12. ſt. u — u, l. u — u^2
— 149. — 7. ſt. — φ, l. $,\varphi$
— 159. — 11. ſt. Hebelkraft, l. Hebekraft
— 349. — 9. ſt. vollendenden, l. vollenden
— 354. — 2. ſt. wenn, l. nenne



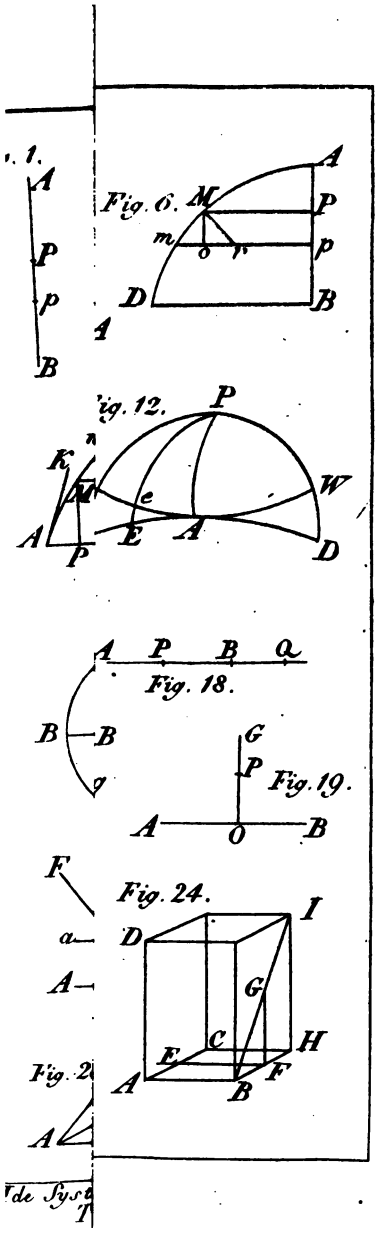
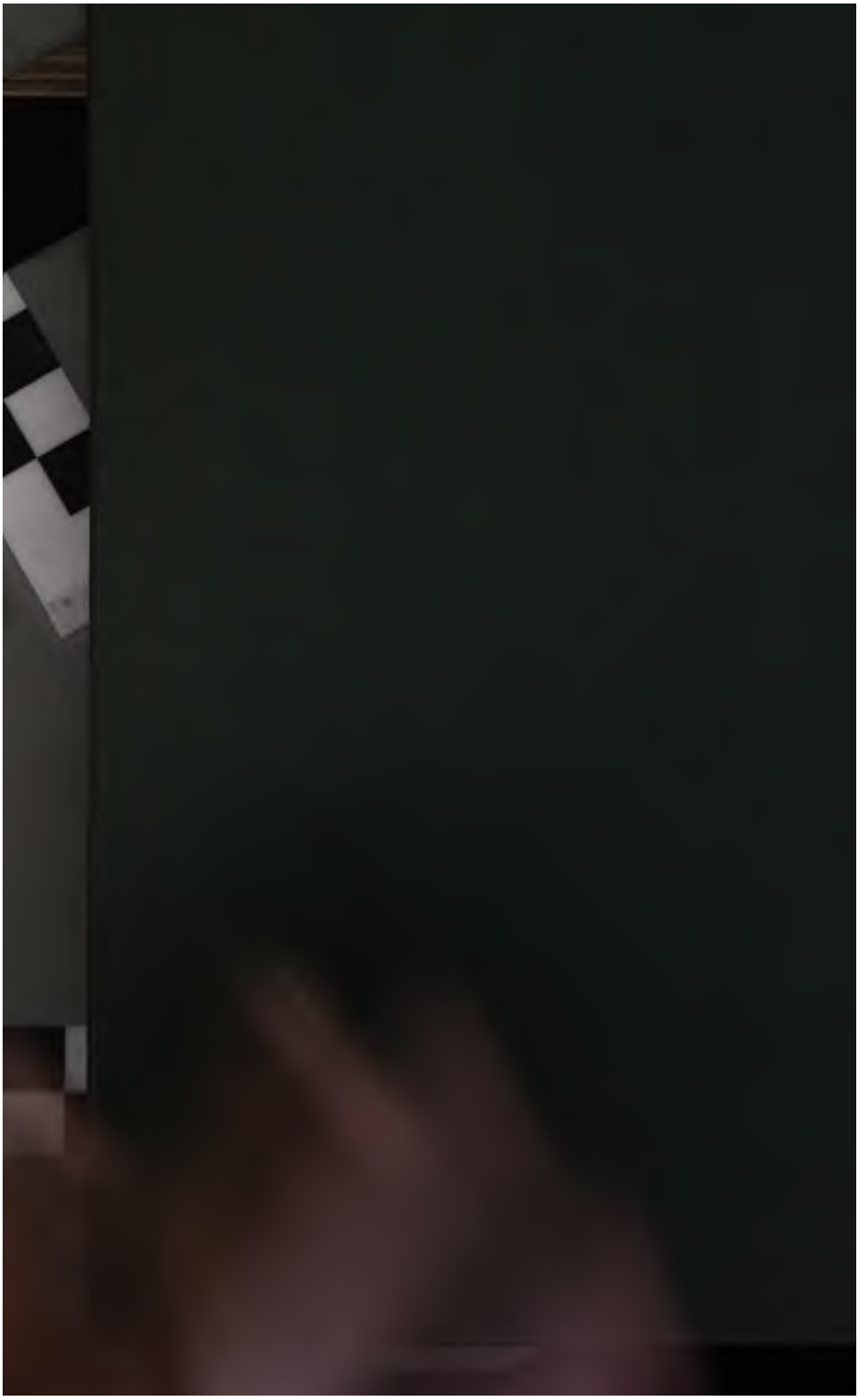



Fig. 6.
Fig. 12.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 24.